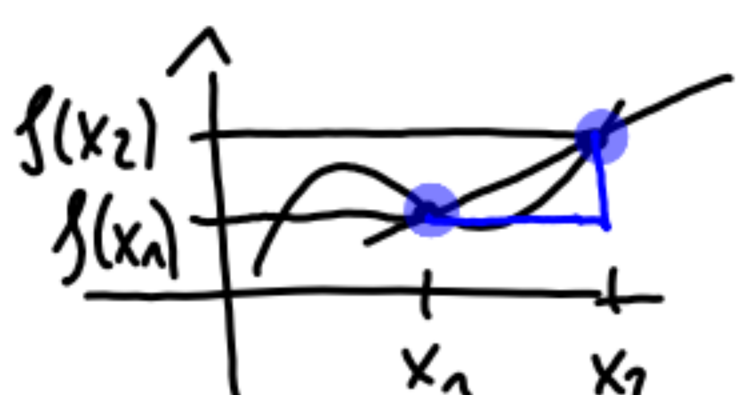
Der Wert $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ entspricht der Steigung einer Geraden durch zwei Punkte $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$ und wird Differenzenquotient genannt.

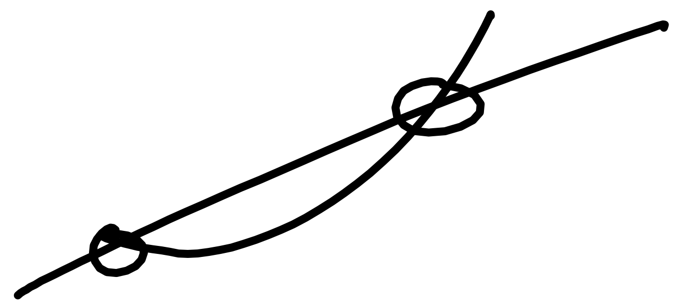
Hat man eine Funktion $f(x)$, so kann man statt $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ auch $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ schreiben. Dann spricht man von der mittleren Änderungsrate im Intervall $[x_1, x_2]$



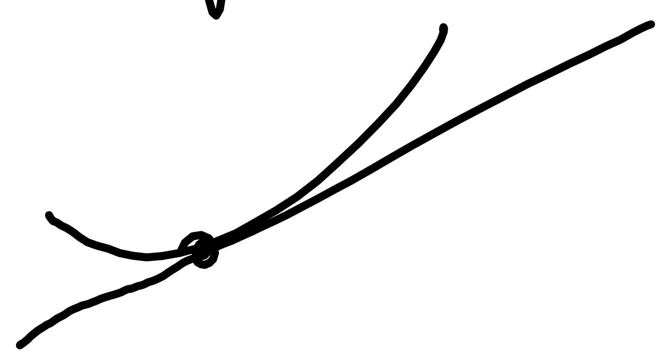
Vgl. Buch S. 205

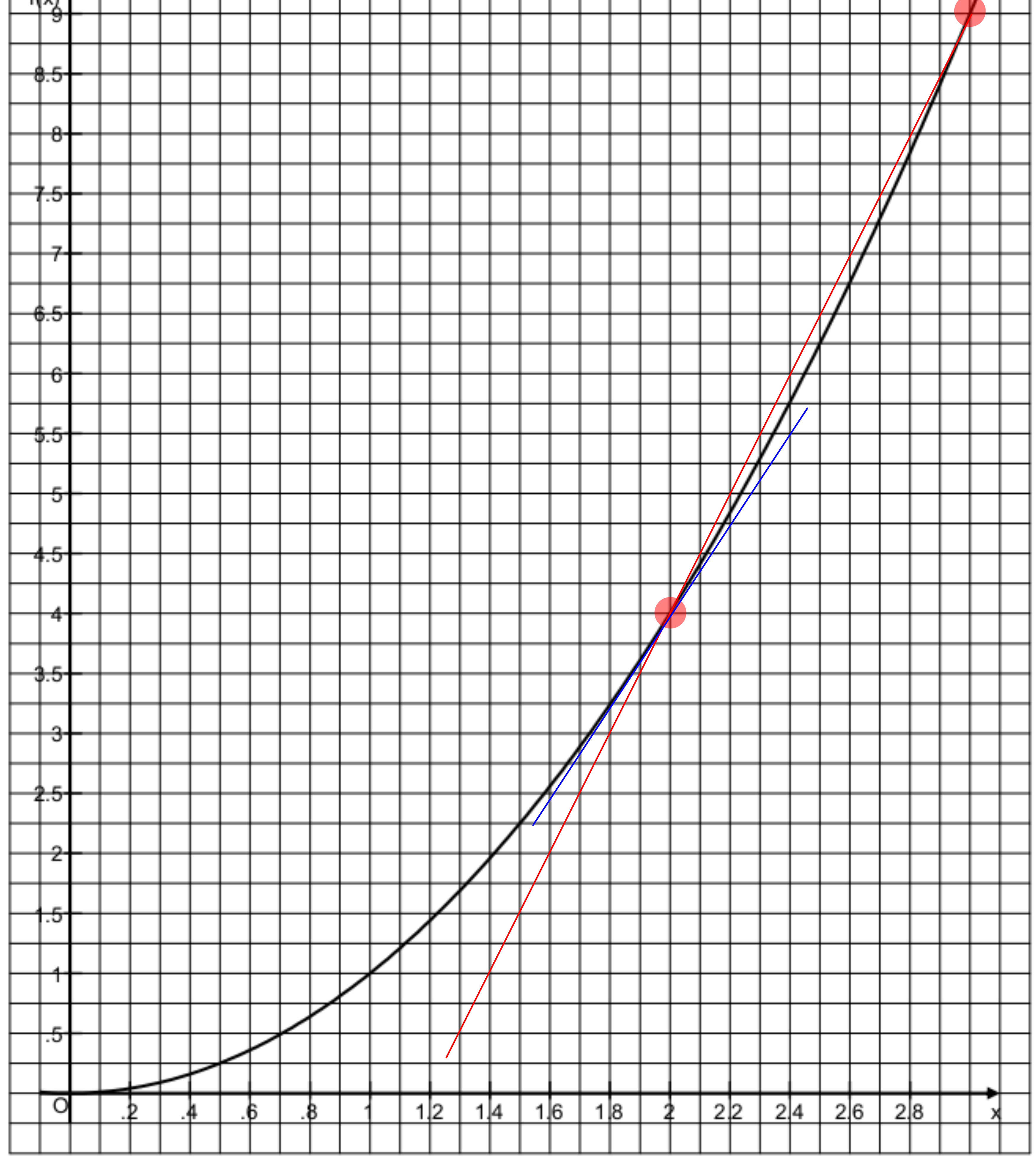
WHB12b, 14.11.17 — Sekanten- und Tangentensteigung

Definition: Eine Gerade, die eine Kurve in zwei Punkten schneidet, heißt <u>Sekante</u>.



Berührt die Gerade die Kurve in genau einem Punkt, so spricht man von einer Tangente.





Sekante durch (2|4) und (|)

Tangente an (2|2)

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info

(*) Wenn $h=0$ ist, dann müsste man rechnen

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x)-f(x)}{x-x} = \frac{0}{0}$$

und das geht nicht, weil die Division durch 0 nicht definiert ist!

Aufgabe: Füllen Sie die Tabelle aus für $f(x) = x^2$! In der letzten Spalte finden Sie dabei die Steigung der Sekante durch den Punkt (2/f(2)) und (2+h/f(2+h)). Was fällt Ihnen auf? **Runden Sie nicht!**

x	f(x)	h	x+h	f(x+h)	f(x+h)-f(x)	h	(f(x+h)-f(x))/h = m_s	
2	$2^2 = 4$	1	3	$3^2 = 9$	5	1	5/1 = 5	
2	$2^2 = 4$	0,5	2,5	6,25	6,25 − 4 = 2,25	~~0,0001~~ 0,5	$\frac{2,25}{0,5} = 4,5$	
2	$2^2 = 4$	0,2	2,2	4,84	0,84	~~0,0001~~ 0,2	$\frac{0,84}{0,2} = 4,2$	
2	$2^2 = 4$	0,1	2,1	4,41	0,41	0,1	4,1	
2	$2^2 = 4$	0,01	2,01	4,0401	0,0401	0,01	4,01	
2	$2^2 = 4$	0,001	2,001	4,004001	0,004001	0,001	4,001	
2	$2^2 = 4$	0,0001	2,0001	$2,0001^2$ = 4,00040001	0,00040001	0,0001	0,00040001 / 0,0001 = 4,0001	4,0001
2	$2^2 = 4$	-0,0001	1,9999	3,99960001	-0,00039999	-0,0001	3,9999	
2	$2^2 = 4$	-0,001	1,999	3,996001	-0,003999	-0,001	3,999	
2	$2^2 = 4$	-0,01	1,99	3,9601	-0,0399	~~-0,001~~ -0,01	3,99	

Vermutung:

Wenn man das h immer kleiner werden lässt und der 2. Punkt damit immer näher an den 1. Punkt (2/4) heranrutscht, dann nähern sich die Steigungen der Sekanten offenbar immer mehr dem Wert 4 an.

Frage:

Was passiert mit der Steigung der Sekante, wenn man h=0 wählt?? Rechnen Sie nach. (*)

Sekantensteigungen am Beispiel $f(x)=x^2$

Wählen Sie ein x aus (gelbes Feld): x= 2

x	f(x)	h	x+h	f(x+h)	f(x+h)-f(x)	h	(f(x+h)-f(x))/h = m_s
2	4	1	3	9	5	1	5
2	4	0,5	2,5	6,25	2,25	0,5	4,5
2	4	0,1	2,1	4,41	0,41	0,1	4,1
2	4	0,01	2,01	4,0401	0,0401	0,01	4,01
2	4	0,001	2,001	4,004001	0,004001	0,001	4,001
2	4	0,0001	2,0001	4,00040001	0,00040001	0,0001	4,0001
2	4	0,00001	2,00001	4,00004	0,0000400	0,00001	4,00001
2	4	-0,00001	1,99999	3,99996	-0,0000400	-0,00001	3,99999
2	4	-0,0001	1,9999	3,99960001	-0,00039999	-0,0001	3,9999
2	4	-0,001	1,999	3,996001	-0,003999	-0,001	3,999
2	4	-0,01	1,99	3,9601	-0,0399	-0,01	3,99
2	4	-0,1	1,9	3,61	-0,39	-0,1	3,9
2	4	-0,5	1,5	2,25	-1,75	-0,5	3,5
2	4	-1	1	1	-3	-1	3

Das h darf nicht 0 werden, da aus den zwei Punkten dann einer wird, was aber gewollt ist, weil man dann eine Tangente hätte, mathematisch aber problematisch ist, da man die Steigung dieser Tangente nicht berechnen kann (Division durch 0).

Idee:

Das **h wird unendlich klein** und man kann mit den beiden unendlich kleinen Werten rechnen und das Ergebnis als **Grenzwert der Sekantensteigung** als Tangentensteigung interpretieren.

Aufgabe: Füllen Sie die Tabelle aus für $f(x) = x^2$!

x	f(x)	h	x+h	f(x+h)	f(x+h)-f(x)	h	(f(x+h)-f(x))/h = m_s
3	9	0,001	3,001	9,006001	0,006001	0,001	6.001
3	9	0,0001	3,0001	9,00060001	0,00060001	0,0001	6,0001
3	9	-0,0001	2,9999	8,99940001	-0,00059999	-0,0001	5,9999
3	9	~~-0,0001~~ -0,001	2,999	8,994001	-0,005999	-0,0001	5,999

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info Homepage: http://www.mathekannjeder.de

x	h	Sek. steigung
2	0,001	4,001
2	-0,001	3,999

4

Zusammenfassung:

x	h	Wert der Sekantensteigung	Vermuteter Grenzwert der Sekanten-steigungen
1	0,001		
1	-0,001		
3	0,001	6,001	6
3	-0,001	5,999	
4	0,001		
4	-0,001		
5	0,001		
5	-0,001		
6	0,001		
6	-0,001		
7	0,001		
7	-0,001		
8	0,001		
8	-0,001		

Vermutung:

Bei der Normalparabel $f(x) = x^2$ hat die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 den Wert __________.

Beweis:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^{\ 2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^{\ 2}+2\cdot x_0\cdot h-x_0^{\ 2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cdot x_0\cdot h}{h} = 2\cdot x_0$$

HA für Fr. 17.11.17

Lesen und verstehen:

Buch S. 206 – 207

3 Steigung in einem Punkt

Unterschied zwischen mittlerer Änderungsrate und lokaler Änderungsrate.