Zusammenfassung:

	HP (Maximum)	TP (Minimum)
Wert der ersten Ableitung	0	0
Wert der zweiten Ableitung	-6	+6

Ergänzen Sie den Lückentext mit den unten stehenden Begriffen.

Bei einem Extrempunkt (Hochpunkt oder Tiefpunkt) ist die Tangente waagerecht und das bedeutet f'(x) $=0$. Bei einem Hochpunkt ist der Wert der zweiten Ableitung negativ, also gilt f''(x) <0 und bei einem Tiefpunkt ist der Wert der zweiten Ableitung positiv, also gilt f''(x) >0.

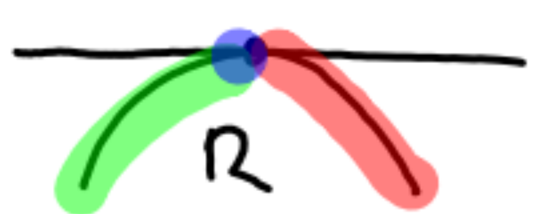
Begriffe: „~~negativ~~"; „~~waagerecht~~"; „~~<0~~"; „~~=0~~"; „positiv"; „>0"

HP

Steigung wird kleiner

+ 0 −

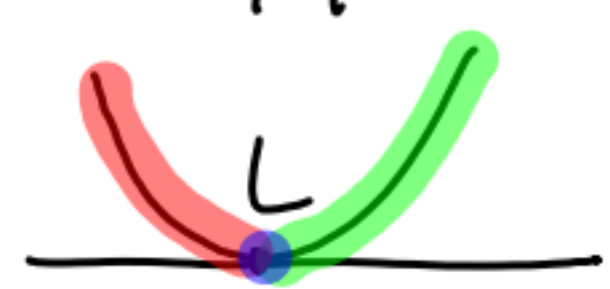
$\Rightarrow f''(x)<0$



$f'(x)=0 \wedge f''(x)<0$

Rechtskurve

TP



$f'(x)=0 \wedge f''(x)>0$

Linkskurve

Steigung wird größer

− 0 +

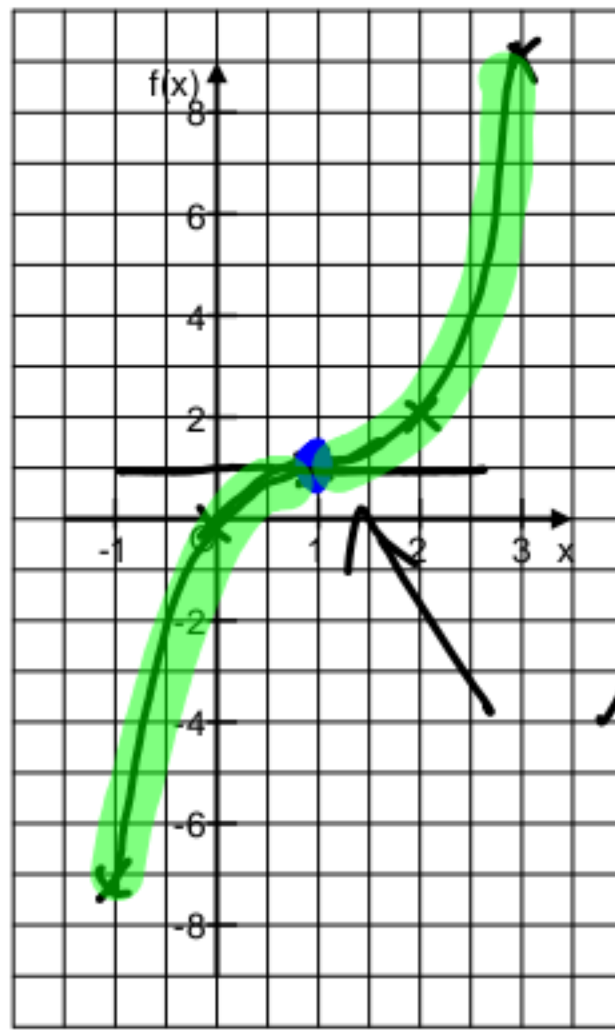
$\Rightarrow f''(x)>0$

Berechnung von Extrempunkten

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Extrempunkte von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Aufgabe 2: Ermitteln Sie mit Hilfe des Horner-Schemas oder des Taschenrechners die y-Werte für die x-Werte von -1 bis 3 und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-7	0	1	2	9



Aufgabe 3: Vergleichen Sie den Graphen von f(x) mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 1 und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

• in Aufgabe 1) (1|1) ausgerechnet

$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$

Information: Offensichtlich gibt es Graphen, die an bestimmten Stellen eine waagerechte Tangente haben und trotzdem an dieser Stelle keinen Extrempunkt. Ein **Extrempunkt** liegt immer dann vor, wenn die **Tangente** an einer Stelle **waagerecht** ist und an dieser Stelle der Graph sein **Steigungsverhalten ändert**.

- Tiefpunkt: Die Steigung wechselt von negativ („bergab") über 0 nach positiv („bergauf").
- Hochpunkt: Die Steigung wechselt von positiv („bergauf") über 0 nach negativ („bergab").

Aufgabe 1) Extrempunkte von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$-\frac{p}{2} = -\frac{-2}{2} = +1$

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

Stelle mit waagerechter Tangente: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad p = -2 \quad q = 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 1}$$

$$= 1 \pm 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 0 = 1 \\ x = 1 - 0 = 1 \end{array}\right\}$$

es gibt nur eine Stelle mit waagerechter Tangente

y-Wert: $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1$

EP $(1|1)$

↳ Die Skizze zeigt: $(1|1)$ ist ein so genannter Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

WHB12B, 14.12.17

Extrempunkte

Bsp: $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 12$

Ableitungen: $f'(x) = 12x^2 - 6x$ $\qquad f''(x) = 24x - 6$

Notwendige Bedingung (für einen Extrempunkt): $f'(x) = 0$

wo ist die Tangente waagerecht

$12x^2 - 6x = 0 \quad |:12 \iff x^2 - 0{,}5x = 0$ $\qquad p = -0{,}5 \quad q = 0$

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-0.5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.5}{2}\right)^2 - 0}$

$= 0{,}25 \pm \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25 \pm 0{,}25$

$x = 0.25 + 0{,}25 = 0{,}5$
$x = 0{,}25 - 0{,}25 = 0$

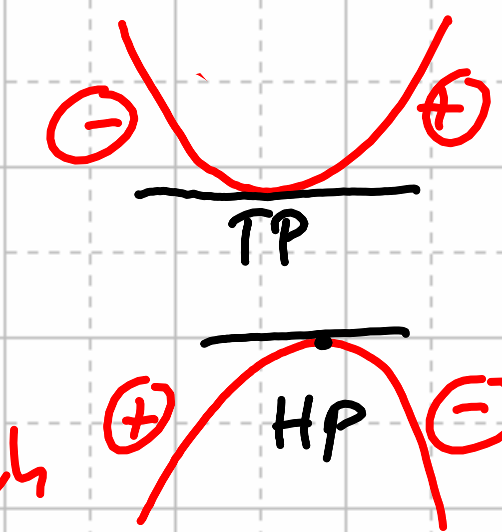
} an diesen Stellen ist die Tangente waagerecht

Hinreichende Bedingung (für einen Extrempunkt): $f'(x)=0 \underset{\text{und}}{\wedge} f''(x) \neq 0$

Einsetzen der Lösungen von $f'(x)=0$ in $f''(x)$

$f''(0{,}5) = 6 > 0$ Steigung wird größer von $\ominus$ nach $\oplus$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x = 0{,}5$



$f''(0) = -6 < 0$ Steigung wird kleiner von $\oplus$ nach $\ominus$

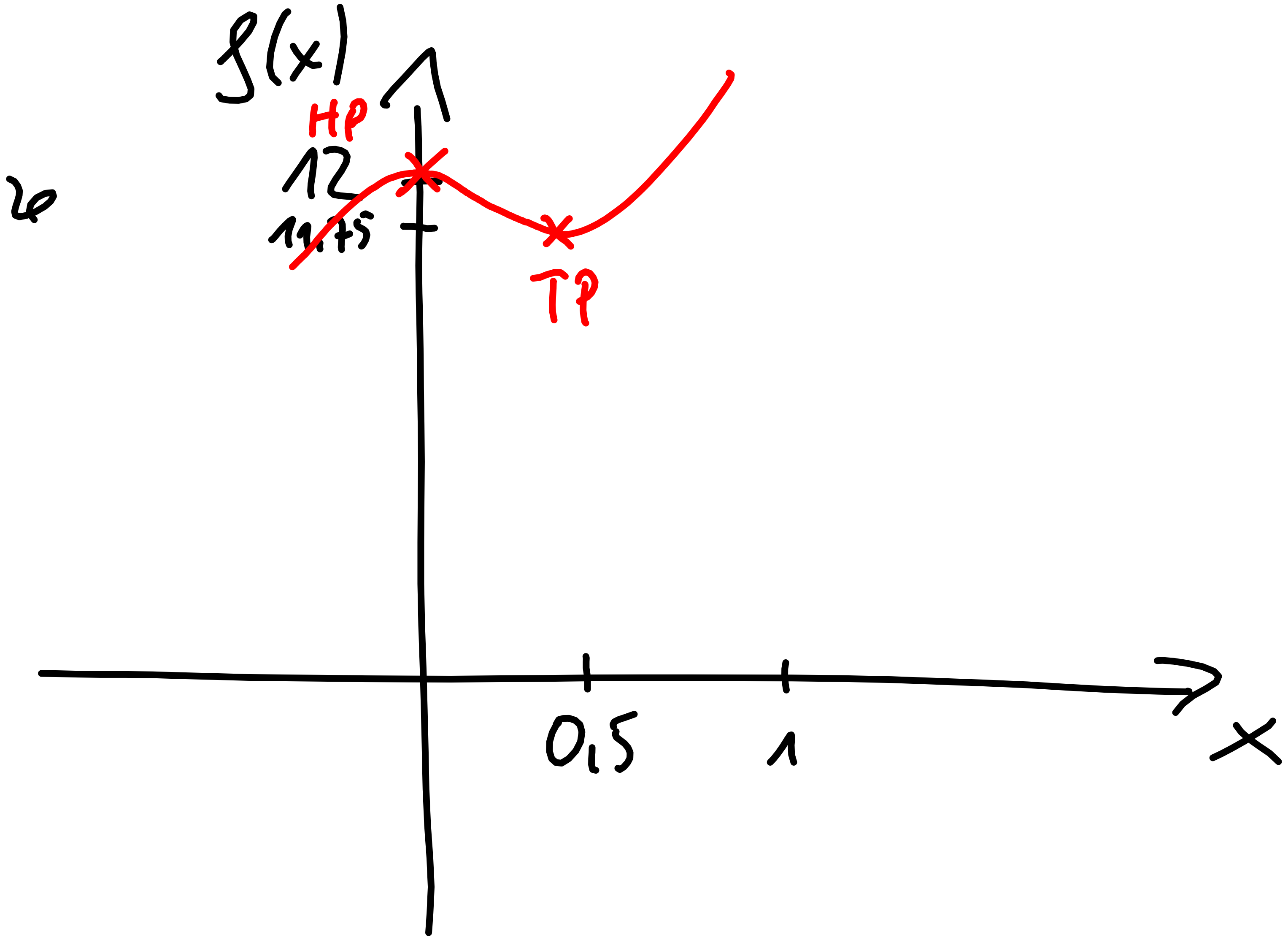
$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $x = 0$

y-Werte: Einsetzen der Lösungen von $f'(x)=0$ in Ausgangsfunktion $f(x)$

$f(0{,}5) = 4 \cdot 0{,}5^3 - 3 \cdot 0{,}5^2 + 12 = 11{,}75$ TP$(0{,}5 \,/\, 11{,}75)$

$f(0) = 4 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 12 = 12$ HP$(0 \,/\, 12)$

Skizze



Übung: Extrempunkte von

a) $f(x) = 8x^3 - 32x + 16$ Jan

b) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 8x + 10$ Sebastian

c) $f(x) = -3x^3 + 9x - 2$ Emil

Jan

$f(x) = 8x^3 - 32x + 16$

Ableitungen: $f'(x) =$

$f''(x) =$

Notw. Bed. (für EP):

Hinr. Bed. (für EP):

$f''(\quad)$

$f''(\quad)$

y-Werte

$f(\quad) =$

$f(\quad) =$

Sebastian

$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 8x + 10$

Ableitungen: $f'(x) =$

$f''(x) =$

Notw. Bed. (für EP)

Hinr. Bed. (für EP)

$f''(\quad) =$

$f''(\quad) =$

y-Werte

$f(\quad) =$

$f(\quad) =$

Emil

$f(x) = -3x^3 + 9x - 2$

Ableitungen: $f'(x) =$

$f''(x) =$

Notw. Bed. (für EP):

Hinr. Bed. (für EP)

$f''(\quad) =$

$f''(\quad) =$

y-Werte

$f(\quad) =$

$f(\quad) =$