

Zusammenfassung:

	HP (Maximum)	TP (Minimum)
Wert der ersten Ableitung	0	0
Wert der zweiten Ableitung	-6	+6

Ergänzen Sie den Lückentext mit den unten stehenden Begriffen.

Bei einem Extrempunkt (Hochpunkt oder Tiefpunkt) ist die Tangente waagrecht

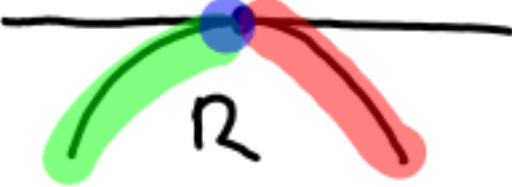
und das bedeutet  $f'(x) = 0$ . Bei einem Hochpunkt ist der Wert der zweiten Ableitung negativ, also gilt  $f''(x) < 0$  und bei einem Tiefpunkt ist der Wert der zweiten Ableitung positiv, also gilt  $f''(x) > 0$ .

Begriffe: „negativ“; „waagrecht“; „<0“; „=0“; „positiv“; „>0“

Steigung wird kleiner

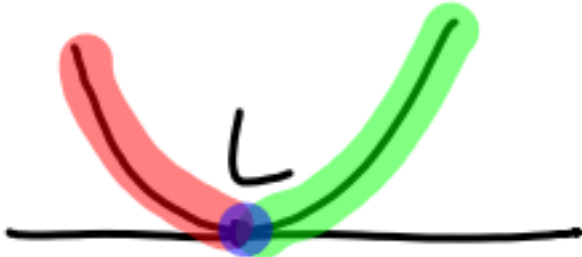
$$+ 0 - \\ \Rightarrow f''(x) < 0$$

HP



$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$   
Rechtskurve

TP



$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$   
Linkskurve

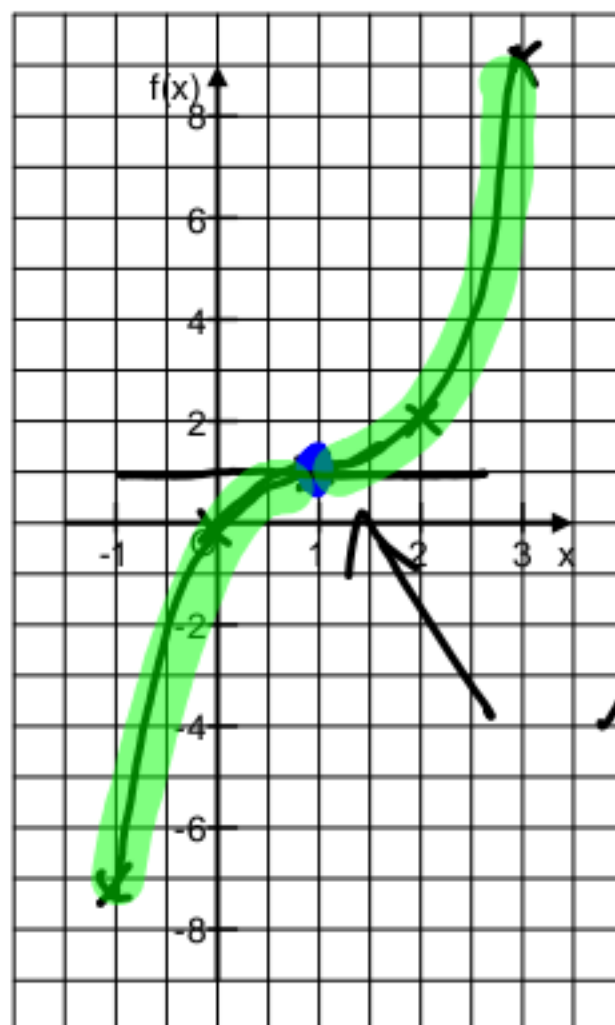
Steigung wird größer  
- 0 +  
 $\Rightarrow f''(x) > 0$

## Berechnung von Extrempunkten

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die Extrempunkte von  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .

**Aufgabe 2:** Ermitteln Sie mit Hilfe des Horner-Schemas oder des Taschenrechners die y-Werte für die x-Werte von -1 bis 3 und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-7	0	1	2	9



**Aufgabe 3:** Vergleichen Sie den Graphen von  $f(x)$  mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 1 und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

• in Aufgabe 1) (1|1) ausgerechnet

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$$

**Information:** Offensichtlich gibt es Graphen, die an bestimmten Stellen eine waagerechte Tangente haben und trotzdem an dieser Stelle keinen Extrempunkt. Ein **Extrempunkt** liegt immer dann vor, wenn die **Tangente** an einer Stelle **waagrecht** ist und an dieser Stelle der Graph sein **Steigungsverhalten ändert**.

• Tiefpunkt: Die Steigung wechselt von negativ („bergab“) über 0 nach positiv („bergauf“).

• Hochpunkt: Die Steigung wechselt von positiv („bergauf“) über 0 nach negativ („bergab“).

Aufgabe 1) Extrempunkte von  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Ableitung:  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$$-\frac{p}{2} = -\frac{-2}{2} = +1$$

Stelle mit waagerechter Tangente:  $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad p = -2 \quad q = 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 1}$$

$$= 1 \pm 0$$

$$x = 1 + 0 = 1$$

$$x = 1 - 0 = 1$$

} es gibt nur  
eine Stelle  
mit  
waagerechter  
Tangente

y-Wert :  $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1$

$$EP(1|1)$$

↳ Die Skizze zeigt:  $(1|1)$  ist ein so genannter  
Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente)

WHD125, 14.12.17

## Extrempunkte

Bsp:  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 12$

Ableitungen:  $f'(x) = 12x^2 - 6x$

$$f''(x) = 24x - 6$$

Notwendige Bedingung (für einen Extrempunkt):  $f'(x) = 0$

$$12x^2 - 6x = 0 \quad | :12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 0,5x = 0$$

wo ist die Tangente waagrecht  
 $p = -0,5$     $q = 0$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{-0,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,5}{2}\right)^2 - 0}$$

$$= 0,25 \pm \sqrt{0,0625} = 0,25 \pm 0,25$$

$$x = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

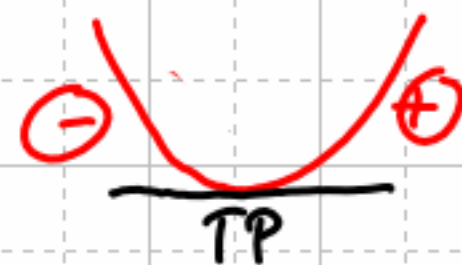
$$x = 0,25 - 0,25 = 0$$

} an diesen Stellen ist die Tangente waagrecht

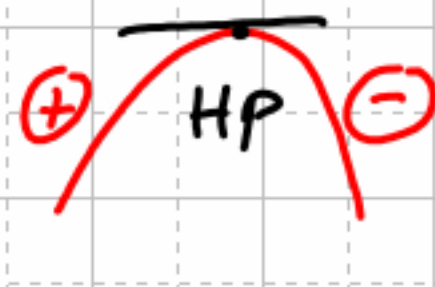
Hinreichende Bedingung (für einen Extrempunkt):  $f'(x)=0$  <sup>und</sup>  $f''(x) \neq 0$

Einsetzen der Lösungen von  $f'(x)=0$  in  $f''(x)$

$f''(0,5) = 6 > 0$  Steigung wird größer von  $\ominus$  nach  $\oplus$   
 $\Rightarrow$  Tiefpunkt bei  $x=0,5$



$f''(0) = -6 < 0$  Steigung wird kleiner von  $\oplus$  nach  $\ominus$   
 $\Rightarrow$  Hochpunkt bei  $x=0$

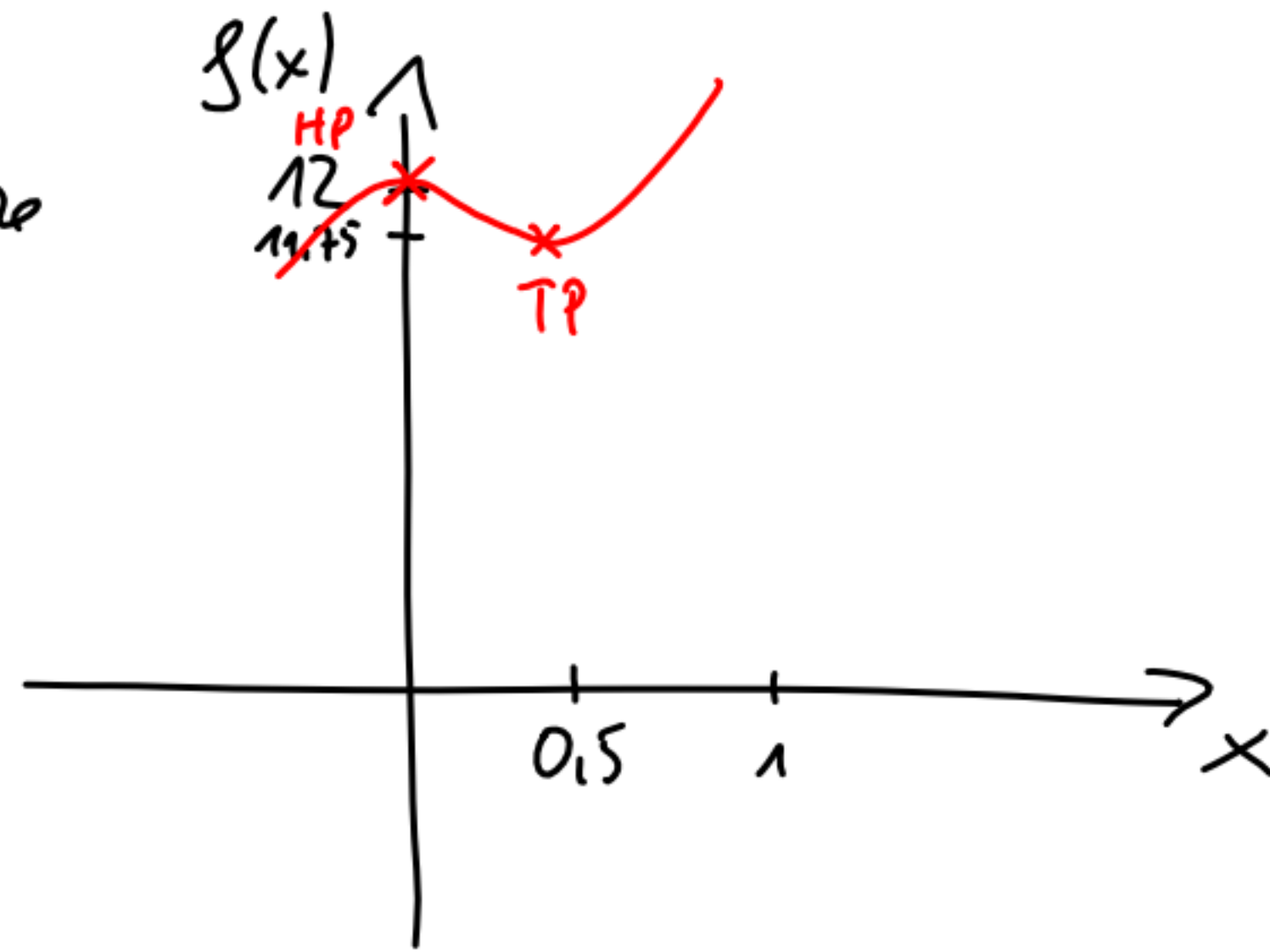


y-Werte: Einsetzen der Lösungen von  $f'(x)=0$  in Ausgangsfunktion  $f(x)$

$$f(0,5) = 4 \cdot 0,5^3 - 3 \cdot 0,5^2 + 12 = 11,75 \quad \text{TP}(0,5 \mid 11,75)$$

$$f(0) = 4 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 12 = 12 \quad \text{HP}(0 \mid 12)$$

Skizze



Übung: Extrempunkte von

a)  $f(x) = 8x^3 - 32x + 16$  Jan

b)  $f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 8x + 10$  Sebastian

c)  $f(x) = -3x^3 + 9x - 2$  Emil

Jan

$$f(x) = 8x^3 - 32x + 16$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = 24x^2 - 32$$
$$f''(x) = 48x$$

Notw. Bed. (für EP):  $f'(x) = 0$

$$24x^2 - 32 = 0 \quad | :24$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3} = 0 \quad p=0 \quad q=-1,3$$
$$x = 1,15 \quad x = -1,15$$

Hinr. Bed. (für EP):  $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(1,15) = 48 \cdot 1,15 = 55,2 > 0 \quad \text{TP}$$
$$f''(-1,15) = 48 \cdot (-1,15) = -55,2 < 0 \quad \text{HP}$$

y-Werte

$$f(1,15) = -8,63 \quad \text{TP}(1,15 | -8,63)$$
$$f(-1,15) = 40,63 \quad \text{HP}(-1,15 | 40,63)$$

Sebastian

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 8x + 10$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = 15x^2 - 12x - 8$$
$$f''(x) = 30x - 12$$

Notw. Bed. (für EP)  $f'(x) = 0$

$$15x^2 - 12x - 8 = 0 \quad | :15$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 0,8x - 0,53 = 0 \quad p = -0,8 \quad q = -0,53$$
$$x = 1,23 \quad x = -0,43$$

Hinr. Bed. (für EP)  $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(1,23) = 24,9 > 0 \quad \text{TP bei } x = 1,23$$
$$f''(-0,43) = -24,9 < 0 \quad \text{HP bei } x = -0,43$$

y-Werte

$$f(1,23) = 0,39 \quad \text{TP}(1,23 | 0,39)$$
$$f(-0,43) = 11,93 \quad \text{HP}(-0,43 | 11,93)$$

Emil

$$f(x) = -3x^3 + 9x - 2$$

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = -9x^2 + 9$$
$$f''(x) = -18x$$

Notw. Bed. (für EP):  $f'(x) = 0$

$$-9x^2 + 9 = 0$$
$$x = 1 \quad x = -1$$

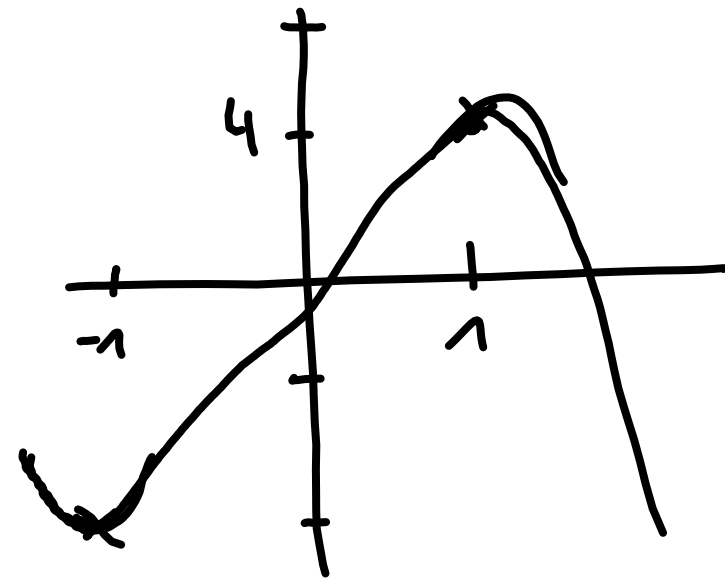
Hinr. Bed. (für EP):  $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(1) = -18 < 0 \quad \text{HP}$$
$$f''(-1) = 18 > 0 \quad \text{TP}$$

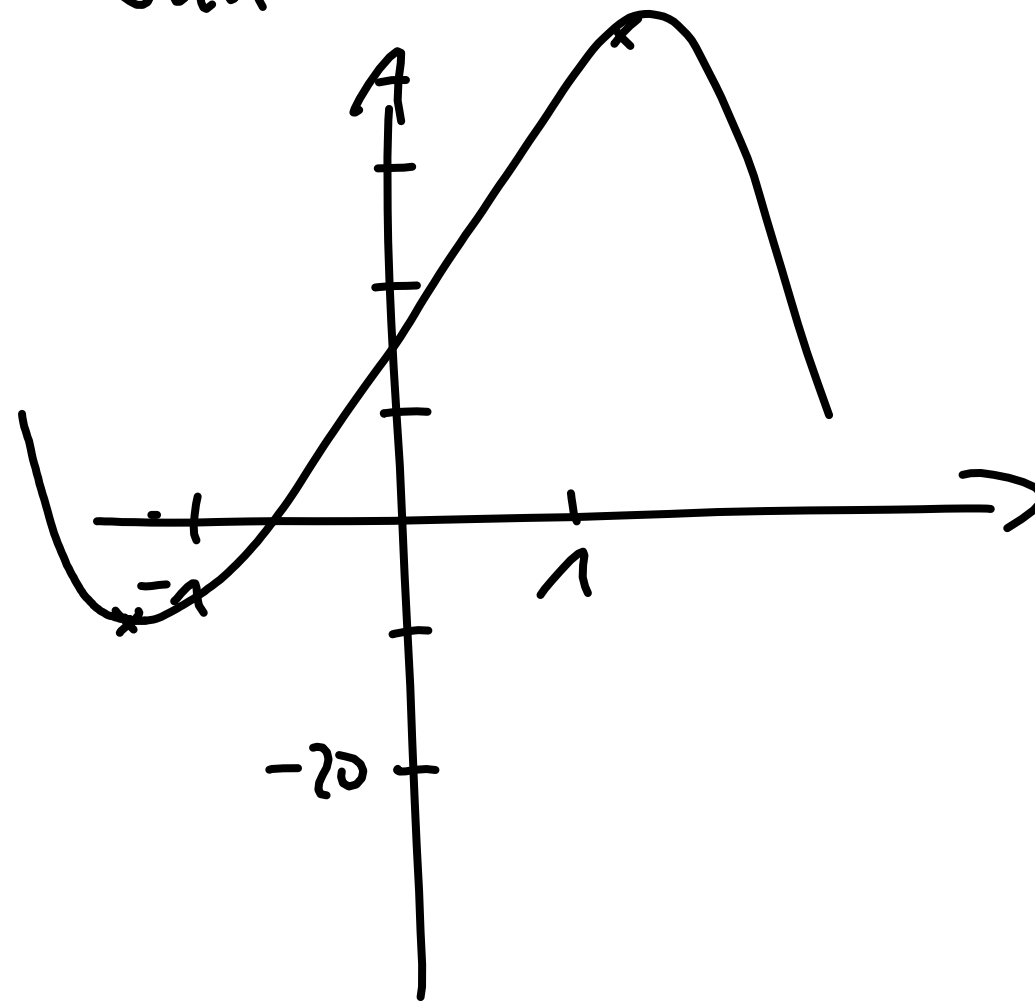
y-Werte

$$f(1) = 4 \quad \text{HP}(1 | 4)$$
$$f(-1) = -8 \quad \text{TP}(-1 | -8)$$

Mizzen Emil



Jan



Sebastian

