

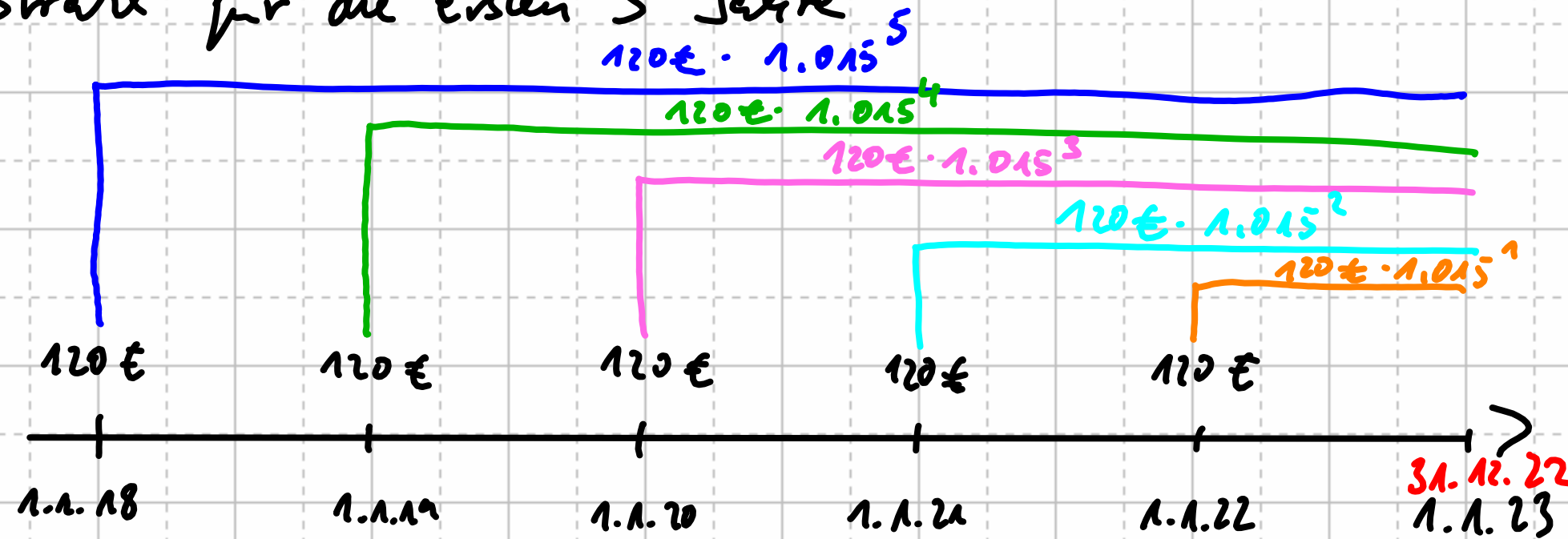
W-HB126, 15.02.1: Rechenrechnung

Probierbeispiel: Der Schüler R. I. (21J.) zahlt bis zur Rente jedes Jahr am 1.1. 120 € in ein Sparkonto. Das Guthaben wird immer am Jahresende verzinst mit 1.5%. Er spart 45 Jahre.

Wie viel Kapital steht am Ende zur Verfügung?

Fadlan: ca 10000 €
Camer: 11239,10 €
Rami: 12000 € - 15000 €
Muhammad: 10550 €
Keren: 20000 €

Zeitstrahl für die ersten 5 Jahre



129,27 €
 127,36 €
 125,48 €
 123,63 €
 121,80 €

1. Jahr 2. Jahr 3. Jahr 4. Jahr 5. Jahr Ende des 5. Jahres
 120 € werden 5x verzinnt 120 € werden 4x verzinnt 120 € werden 3x verzinnt 120 € werden 2x verzinnt 120 € werden 1x verzinnt

Kapital am Ende des 5. Jahres (31.12.22)

$$\begin{aligned}
 &= 120 \text{ €} \cdot 1,015^5 + 120 \text{ €} \cdot 1,015^4 + 120 \text{ €} \cdot 1,015^3 + 120 \text{ €} \cdot 1,015^2 + 120 \text{ €} \cdot 1,015^1 \\
 &= 129,27 \text{ €} + 127,36 \text{ €} + 125,48 \text{ €} + 123,63 \text{ €} + 121,80 \text{ €} \\
 &= 627,54 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Die jährlich gleich bleibende Zahlung wird als Rente r bezeichnet.
Wenn man zu Beginn des Jahres zahlt spricht man von vorschüssiger Rente,
zahlt man am Ende des Jahres, heißt es nachschüssige Rente.

Rechnung von S.Z.:

$$\begin{aligned} & r \cdot q^5 + r \cdot q^4 + r \cdot q^3 + r \cdot q^2 + r \cdot q \\ &= r \cdot \left(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q^1 \right) \quad \leftarrow \text{Kapital am Ende des 5. Jahres} \\ &= \frac{q^5 - 1}{q - 1} \cdot q \end{aligned}$$

Kapital am Ende des 45. Jahres:

$$\begin{aligned} & r \cdot \left(q^{45} + q^{44} + q^{43} + \dots + q^3 + q^2 + q^1 \right) \\ &= \frac{q^{45} - 1}{q - 1} \cdot q \end{aligned}$$

Das Kapital, das bei einer jährlichen Rentenzahlung am Ende der Laufzeit (nach n Jahren) zur Verfügung steht, nennt man **Rentenendwert**.

Vorschüssige Rentenendwert:
$$R_{vn} = r \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)} \cdot q$$

Nachschüssige Rentenendwert:
$$R_n = r \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Im Bsp:
$$R_{v5} = 120 \text{ €} \cdot \frac{(1,015^5 - 1)}{(1,015 - 1)} \cdot 1,015 = 627,55 \text{ €}$$

bis auf 1 Cent Rundung
gleich

↳ Kapital nach 5 Jahren

•
$$R_{v45} = 120 \text{ €} \cdot \frac{(1,015^{45} - 1)}{(1,015 - 1)} \cdot 1,015 = \underline{\underline{7748,21 \text{ €}}}$$

Rentenendwert