WHB12b, 23.02.18

Annuitätendarlehen mit fester Laufzeit

Bsp: Herr V. möchte ein Darlehen über 50.000 € bei einem Zinssatz von 3% p.a innerhalb von 5 Jahren zurückzahlen (n=5). Wie hoch ist die Annuität und wie sieht der Tilgungsplan aus?

Buch S. 354/355 Formel für Annuität $A = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$

$$A = 50\,000\,€ \cdot \frac{1{,}03^5 \cdot (1{,}03-1)}{(1{,}03^5 - 1)} = 10917{,}73\,€$$

Tilgungsplan

Jahr	Schuld am Jahresbeginn	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Jahresende
1	50000 €	10917,73 €	1500 € *	9417,73 € *	40582,27 € *
2	40582,27 €	10917,73 €	1217,46 € **	9700,25 € **	30882,02 €
3	30882,02 €	10917,73 €	926,46 €	9991,27 €	20890,75 €
4	20890,75 €	10917,73 €	626,72 €	10291,01 €	10599,74 €
5	10599,74 €	1091,73 €	317,99 €	10599,74 €	$\underline{\underline{0\,€}}$

* $50000\,€ \cdot \frac{3}{100}$

* $10917{,}73\,€ - 1500\,€$

* $50000\,€ - 9417{,}73\,€$

** $40582{,}27\,€ \cdot \frac{3}{100}$

** $10917{,}73\,€ - 1217{,}46\,€$

HA: Annuitätendarlehen

Anfangstilgung	feste Laufzeit
$K_0 = 60.000$ €	$K_0 = 300.000$ €
$p = 2{,}8\%$ p.a	$p = 2{,}5\%$ p.a
Anfangstilgung $i = 5\%$	$n = 4$ Jahren
Tilgungsplan für die ersten 5 Jahre und Restschuld nach 5 Jahren	

WHB12b, 1.3.18

Annuitätendarlehen

HA vom 23.02.18

Darlehen: 300000€
Zinssatz: 2,5% p.a
Laufzeit: 4 Jahre (feste Laufzeit)

$$A = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{(q^n - 1)} =$$

$$= 300\,000€ \cdot \frac{1{,}025^4 \cdot (1{,}025-1)}{(1{,}025^4 - 1)}$$

$$= 79\,745{,}36€$$

Tilgungsplan

Jahr	Restschuld Jahresbeginn	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld Jahresende
1	300 000€	79745,36€	7500€	72245,36€	227 754,64€
2	227 754,64€	79745,36€	5693,87€	74 051,49€	153 703,15€
3	153703,15€	79745,36€	3842,58€	75902,78€	77 800,36€
4	77800,36€	79745,36€	1945,00€	77800,36€	0 €

Annuitätendarlehen mit Anfangstilgung

$K_0 = 60000\,€$ $\quad p = 2{,}8\%$ p.a. $\quad i = 5\%$ $\Rightarrow A = K_0 \cdot \frac{(p+i)}{100}$

$= 60000\,€ \cdot \frac{(2{,}8+5)}{100}$

$= 4680\,€$

Tilgungsplan

Jahr	Restschuld Jahresbeginn	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld Jahresende
1	60000 €	4680 €	1680 €	3000 €	57000 €
2	57000 €	4680 €	1596 €	3084 €	53916 €
3		4680 €			
4		4680 €			
5	47486,53 €	4680 €	1329,62 €	3350,38 €	44136,15 €

Frage: Nach wie viel Jahren ist das Darlehen vollständig abgezahlt?

Überlegung: 1) Wie entwickelt sich die Schulden, wenn man keine Zinsen und keine Tilgung bezahlt?

↳ Schulden nach n Jahren: $K_0 \cdot q^n$

2) Welchen (Renten)endwert hat die jährlich gezahlte Annuität nach n Jahren (Annuität wird nachschüssig gezahlt)?

↳ Formel für Rentenendwert (nachschüssig)

$$A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ansatz: Diese Werte müssen übereinstimmen, wenn die Schulden abgezahlt sind

$$K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1) $K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Big| : \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$\Leftrightarrow K_0 \cdot q^n \cdot \frac{(q-1)}{(q^n - 1)} = A$

Umstellen nach A für die Formel für die Annuität bei fester Laufzeit

2) $K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Big| : A$

$\Leftrightarrow \frac{K_0 \cdot q^n}{A} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Big| \cdot (q-1)$

$\Leftrightarrow \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q-1)}{A} = q^n - 1$

$\Leftrightarrow \frac{K_0 \cdot (q-1)}{A} \cdot q^n = q^n - 1 \quad \Big| + 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{K_0 \cdot (q-1)}{A}}_{=: s} \cdot q^n + 1 = q^n$

$\Leftrightarrow s \cdot q^n + 1 = 1 \cdot q^n \quad \Big| - s \cdot q^n$

$\Leftrightarrow 1 = 1 \cdot q^n - s \cdot q^n = (1 - s) q^n \quad \Big| : (1 - s)$

$\Big| : \log q$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - s} = q^n \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{K_0 \cdot (q-1)}{A}} = q^n \quad \Big| \log \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 \cdot (q-1)}{A}}\right) = n \cdot \log q$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{K_0\cdot(q-1)}{A}}\right)}{\log q} = n$$

Einsehen von $q = 1{,}078$ $K_0 = 60000\,€$, $A = 4680\,€$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{60000\,€\cdot(1{,}078-1)}{4680\,€}}\right)}{\log 1.078} =$$