# HA: Annuitätendarlehen

## Anfangstilgung

$K_0 = 60.000\ €$

$p = 2,8\ \%$ p.a

Anfangstilgung $i = 5\ \%$

Tilgungsplan für die ersten 5 Jahre und Restschuld nach 5 Jahren

## feste Laufzeit

$K_0 = 300.000\ €$

$p = 2,5\ \%$ p.a

$n = 4$ Jahren

Annuitätendarlehen mit Anfangstilgung

$K_0 = 60000\,€$ $\quad p = 2{,}8\%$ p.a. $\quad i = 5\%$ $\Rightarrow A = K_0 \cdot \frac{(p+i)}{100}$

$= 60000\,€ \cdot \frac{(2{,}8+5)}{100}$

$= 4680\,€$

Tilgungsplan

| Jahr | Restschuld Jahresbeginn | Annuität | Zinsen | Tilgung | Restschuld Jahresende |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 60000 € | 4680 € | 1680 € | 3000 € | 57000 € |
| 2 | 57000 € | 4680 € | 1596 € | 3084 € | 53916 € |
| 3 | | 4680 € | | | |
| 4 | | 4680 € | | | |
| 5 | 47486,53 € | 4680 € | 1329,62 € | 3350,38 € | 44136,15 € |

Frage: Nach wie viel Jahren ist das Darlehen vollständig abgezahlt?

Überlegung: 1) Wie entwickelt sich die Schulden, wenn man keine Zinsen und keine Tilgung bezahlt?

↳ Schulden nach $n$ Jahren: $K_0 \cdot q^n$

2) Welchen (Renten)endwert hat die jährlich gezahlte Annuität nach $n$ Jahren (Annuität wird nachschüssig gezahlt)?

↳ Formel für Rentenendwert (nachschüssig)

$$A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ansatz: Diese Werte müssen übereinstimmen, wenn die Schulden abgezahlt sind

$$K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1) $K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Big| : \frac{q^n-1}{q-1}$

$\Leftrightarrow K_0 \cdot q^n \cdot \frac{(q-1)}{(q^n-1)} = A$

Umstellen nach A für die Formel für die Annuität bei fester Laufzeit

2) $K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \big| : A$

$\Leftrightarrow \frac{K_0 \cdot q^n}{A} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \big| \cdot (q-1)$

$\Leftrightarrow \frac{K_0 \cdot q^n \cdot (q-1)}{A} = q^n - 1$

$\Leftrightarrow \frac{K_0 \cdot (q-1)}{A} \cdot q^n = q^n - 1 \quad \big| +1$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{K_0 \cdot (q-1)}{A}}_{=: s} \cdot q^n + 1 = q^n$

$\Leftrightarrow s \cdot q^n + 1 = 1 \cdot q^n \quad \big| - s \cdot q^n$

$\Leftrightarrow 1 = 1 \cdot q^n - s \cdot q^n = (1-s) q^n \quad \big| : (1-s)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-s} = q^n \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{K_0 \cdot (q-1)}{A}} = q^n \quad \big| \log \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{1 - \frac{K_0 \cdot (q-1)}{A}}\right) = n \cdot \log q \quad \big| : \log q$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{K_0\cdot(q-1)}{A}}\right)}{\log q} = n$$

Einsehen von $q = 1{,}028$ $\quad K_0 = 60000\,€$ , $A = 4680\,€$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{1-\frac{60000\,€\cdot(1{,}028-1)}{4680\,€}}\right)}{\log 1{,}028} = 16{,}1$$

Das Darlehen ist nach etwas mehr als 16 Jahren abbezahlt!

Übung: Laufzeit eines Annuitätendarlehens mit Anfangstilgung

WHB12b, 8.3.18

a) $K_0 = 300000$ € $\quad p = 1{,}8\%$ p.a Tilgung: 4 % im 1. Jahr

b) $K_0 = 250000$ € $\quad p = 1{,}2\%$ p.a Tilgung: 11 % im Jahr

$5x - 2x = 3x$

---

a) Annuität $A = K_0 \cdot \frac{(p+i)}{100} = 300000€ \cdot \frac{(1{,}8+4)}{100} = 17400€$

Achtung: $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{1{,}8}{100} = \underline{\underline{1{,}018}}$

n ist gesucht

Ansatz: $K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Leftrightarrow 300000€ \cdot 1{,}018^n = 17400€ \cdot \frac{1{,}018^n - 1}{1{,}018 - 1} \quad |:17400€$

$\Leftrightarrow 17{,}2414 \cdot 1{,}018^n = \frac{1{,}018^n - 1}{0{,}018} \quad |\cdot 0{,}018 \Leftrightarrow 0{,}3103 \cdot 1{,}018^n = 1{,}018^n - 1 \quad |+1$

$\Leftrightarrow 0{,}3103 \cdot 1{,}018^n + 1 = 1 \cdot 1{,}018^n \quad |- 0{,}3103 \cdot 1{,}018^n \Leftrightarrow 1 = 1 \cdot 1{,}018^n - 0{,}3103 \cdot 1{,}018^n$

$\Leftrightarrow 1 = \underbrace{0{,}6897}_{1-0{,}3103} \cdot 1{,}018^n \quad |:0{,}6897 \Leftrightarrow 1{,}4499 = 1{,}018^n \quad |\log \Leftrightarrow \log 1{,}4499 = \log 1{,}018^n$

$\Leftrightarrow \log 1{,}4499 = n \cdot \log 1{,}018 \quad |:\log 1{,}018 \Leftrightarrow \frac{\log 1{,}4499}{\log 1{,}018} = n = 20{,}82$

# Restschuld nach n Jahren bei Annuitätendarlehen

$$RS_n = K_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aufgabe S. 357 Nr. 7   Nur Restschuld nach 16 bzw. 32 Jahren

$K_0 = 200\,000\,€$   $p = 6\%$ p.a   $i = 1\%$

$$A = 200\,000\,€ \cdot \frac{(6+1)}{100} = 14\,000\,€$$

$$RS_{16} = 200\,000\,€ \cdot 1{,}06^{16} - 14\,000\,€ \cdot \frac{(1{,}06^{16} - 1)}{(1{,}06 - 1)} = 148.654{,}94\,€$$

$$RS_{32} = 200\,000\,€ \cdot 1{,}06^{32} - 14\,000\,€ \cdot \frac{(1{,}06^{32} - 1)}{(1{,}06 - 1)} = 18.220{,}44\,€$$