WHD12b, 19.04.18 Prüfungsvorbereitung Stochastik

Aufgabe „Fahrradketten"

a) ZV $X$: Anzahl Fahrradketten, die Ausschuss sind

Erwartete Anzahl Ausschuss (insgesamt)

↳ Erwartungswert $E(X) = 1000 \cdot \frac{5}{100} + 3000 \cdot \frac{3}{100} + 6000 \cdot \frac{2}{100}$

$$= \underbrace{50}_{\text{erwarteter Ausschuss von A}} + \underbrace{90}_{\text{erw. Ausschuss B}} + \underbrace{120}_{\text{erw. Ausschuss C}} = \underline{\underline{260}}$$

Die durchschnittliche Ausschussquote beträgt also $\frac{260}{10000} = 0{,}026 = 2{,}6\,\%$

Die erwartete Anzahl funktionsfähiger Fahrradketten beträgt $10000 - 260 = \underline{\underline{9740}}$.

b) Durchschnittlicher Bezugspreis sind die Kosten, die eine funktionsfähige Fahrradkette verursacht

$$\Rightarrow \frac{\text{Gesamtkosten}}{\text{Anzahl funktionsfähige Ketten}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1000 \cdot 9{,}80\,€ + 3000 \cdot 8{,}90\,€ + 6000 \cdot 8{,}50\,€}{9740}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9800\,€ + 26700\,€ + 51000\,€}{9740} = \frac{86700\,€}{9740} = \underline{\underline{8{,}90\,€}}$$

c) Nur Ketten von Zulieferer A

ZV $X$: Anzahl Fahrradketten, die Ausschuss sind

Stichprobe von $n = 80$ Fahrradketten

Wahrscheinlichkeit für eine Fahrradkette, die Ausschuss ist: $p = 5\%$

Es gibt $n = 80$ Versuche mit identischer Trefferwahrscheinlichkeit $p$, die voneinander unabhängig sind, d.h. das Ergebnis des vorherigen Versuchs, beeinflusst das nächste Ergebnis nicht.

↳ Bernoulli-Kette der Länge $n = 80$ und die Verteilung der ZV ist $\underbrace{X \sim B(80; 0{,}05)}_{\text{Angabe der Verteilung von } X}$ ($B \hat{=}$ Binomialverteilung)

Formel von Bernoulli

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$$

$$X \sim B(80;\ 0{,}05)$$

Erwartungswert bei binomialverteilten ZV:

$$E(X) = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}05 = \underline{\underline{4}}$$

Man erwartet in der Stichprobe ca 4 Ausschuss-Ketten.

Abweichung von 25% vom Erwartungswert: $4 \cdot \frac{25}{100} = 1$

→ Abweichung nach oben $4+1=5$

→ " " unten $4-1=3$

$$\Rightarrow P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \binom{80}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^{77} + \binom{80}{4} \cdot 0{,}05^4 \cdot 0{,}95^{76}$$

$$+ \binom{80}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{75} = 0{,}1978 + 0{,}2004 + 0{,}1603 = \underline{\underline{0{,}5585}} = 55{,}85\%$$

80 nCr 3

Alternative (mit summierter Binomialtabelle, die W. für $P(X \leq k)$ enthält)

↑ höchstens k Treffer

$$P(X \leq 5) = 0{,}7892 = \underbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)}_{\substack{\text{zuviel} \\ = P(X \leq 2)}} + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$P(X \leq 2) = 0{,}2306 = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = 0{,}7892 - 0{,}2306 = 0{,}5586$$

d) ZV X: Anzahl Ausschuss von B

Verteilung von X: $X \sim B(100; 0{,}03)$

a) $P(E_1) = P(X \leq 3) = \underline{0{,}6472}$

höchstens

b) $P(E_2) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}1946$

$= \underline{0{,}8054}$

mindestens

Das Gegenereignis von „mindestens 2 sind defekt" ist „höchstens eine ist defekt".

c) $P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$

$= 0{,}9192 - 0{,}4198 = \underline{0{,}4994}$

e) ZV X: Anzahl Ausschuss von C

$X \sim B(n;\ 0{,}02)$

$\hookrightarrow$ unbekannt

$P(X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mindestens}}}{\geq} 1) = 1 - P(X=0) \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{0{,}02^0}_{=1} \cdot 0{,}98^n \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}98^n \geq 0{,}95 \quad | -0{,}95 + 0{,}98^n \quad \Leftrightarrow 0{,}05 \geq 0{,}98^n \quad | \log$

$\Leftrightarrow \log 0{,}05 \geq n \cdot \log 0{,}98 \quad | : \log 0{,}98$ $\quad \log 0{,}98 < 0 \rightarrow \geq \rightarrow \leq$

$\Leftrightarrow \frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}98} \leq n \Leftrightarrow 148{,}28 \leq n$ $\quad \rightarrow$ Es müssen 149 Ketten getestet werden.