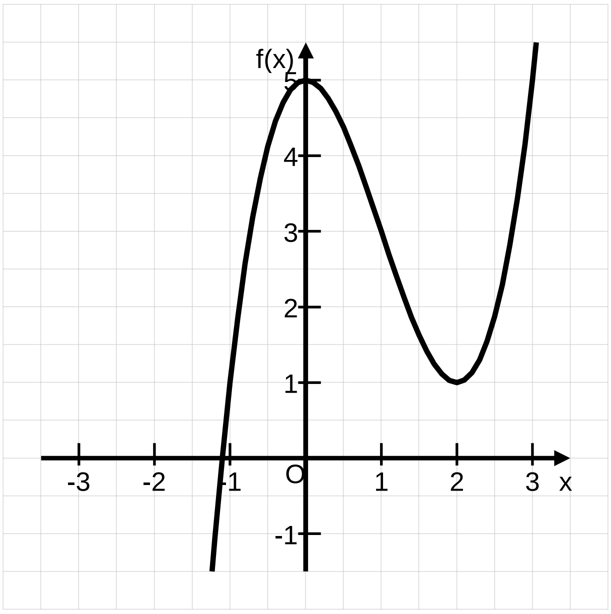
	WHB12b, Mathematik **Stundenthema: Extrempunkte**	Datum:

<u>Situation:</u> Sie sehen einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $\mathbf{f(x) = x^3 - 3x^2 + 5}$.



<u>Aufgaben:</u>

1. Markieren Sie die Bereiche des Graphen mit einer positiven Steigung („bergauf“ in der Seitenperspektive) mit grün und die Bereiche des Graphen mit einer negativen Steigung („bergab“ in der Seitenperspektive) mit rot.

2. An zwei Punkten des Graphen ist die Tangente waagerecht. Markieren Sie diese beiden Punkte und zeichnen Sie die beiden waagerechten Tangenten ein.

3. Die beiden Punkte heißen Hochpunkt (HP) und Tiefpunkt (TP). Welche Koordinaten haben sie? Lesen Sie ab!

   HP (/   )   TP (/   )

4. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 2 wie folgt:

   - Ermitteln Sie die erste Ableitung: f‘(x)=________________________________
   - Setzen Sie die x-Werte der Punkte mit den waagerechten Tangenten in f‘(x) ein

     f‘ (   ) =

     f‘ (   ) =

5. Ermitteln Sie die zweite Ableitung (das ist die Ableitung von der ersten Ableitung)

   f'' (x) = ___________________________________

6. Setzen Sie die beiden x-Werte vom Hoch- und Tiefpunkt in die zweite Ableitung ein und vergleichen Sie die Ergebnisse.

   f'' (   ) =

   f'' (   ) =

7. Überprüfen Sie, ob sie die y-Werte vom Hoch- und Tiefpunkt richtig abgelesen haben. Setzen Sie die x-Werte der Punkte in die Funktion f(x) ein.

   f (   ) =

   f (   ) =

<u>Zusammenfassung:</u>

	HP (Maximum)	TP (Minimum)
Wert der ersten Ableitung		
Wert der zweiten Ableitung		

<u>Ergänzen Sie den Lückentext mit den unten stehenden Begriffen.</u>

Bei einem Extrempunkt (Hochpunkt oder Tiefpunkt) ist die Tangente __________________

und das bedeutet f'(x) _____________. Bei einem Hochpunkt ist der Wert der zweiten Ab-

leitung _______________________, also gilt f''(x) ______________ und bei einem Tiefpunkt

ist der Wert der zweiten Ableitung _______________________, also gilt f''(x) ___________.

Begriffe: „negativ“;   „waagerecht“;   „< 0“;   „=0“;   „positiv“;   „>0“

Beispiel: Untersuchen Sie $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 6x$ auf Extrempunkte.

Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 16x + 6$ und $f''(x) = 12x - 16$

<u>Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt: $f'(x) = 0$</u>

$6x^2 - 16x + 6 = 0$ ergibt mit quadratischer Ergänzung oder pq-Formel $x_1 = 2{,}22$ und $x_2 = 0{,}45$

An diesen beiden Stellen besitzt der Graph von f(x) eine waagerechte Tangente.

<u>Hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$</u>

Man setzt die Lösungen ein in f''(x)

$f''(2{,}22) = 12 \cdot 2{,}22 - 16 = 10{,}64 > 0$ => TP bei x=2,22 (Steigung wird größer)

$f''(0{,}45) = 12 \cdot 0{,}45 - 16 = -10{,}6 < 0$ => HP bei x=0,45 (Steigung wird kleiner)

<u>Hinweis:</u> Die beiden Ergebnisse 10,64 und -10,6 benötigt man nur für die Entscheidung, ob an der Stelle ein Hochpunkt oder Tiefpunkt vorliegt. Entscheidend ist auch nicht die Zahl, sondern nur das Vorzeichen, also plus oder minus!

<u>y-Werte der Extrempunkte berechnen und Extrempunkte angeben</u>

Man setzt die Lösungen von f'(x) = 0 ein in f(x) (Ausgangsfunktion)

f(2,22) = -4,22 **TP (2,22/-4,22)**

f(0,45) = 1,26 **HP (0,45/1,26)**

<u>Hausaufgabe (zur Übung):</u>

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x^2 - 2x - 8$ auf Extrempunkte.

1. Lösen Sie die Gleichung f'(x) = 0 **<u>(Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt)</u>**
2. Setzen Sie die beiden Lösungen aus dem 1. Schritt ein in die 2. Ableitung und überprüfen Sie, ob das Ergebnis positiv (Tiefpunkt) oder negativ (Hochpunkt) ist.

   <u>(Hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt)</u>
3. Setzen Sie die beiden Lösungen aus dem 1. Schritt ein in die Ausgangsfunktion f(x), um die y-Werte der beiden Extrempunkte zu überprüfen.
4. Geben Sie den Hochpunkt und den Tiefpunkt an.

Kontrolle: HP (-3,10 / 2,53) und TP (0,43 / -8,45)