Obersumme 1 Untersumme 0
Anzahl Rechtecke

Test der Formel für $n=6$

Untersumme: $\sum_{i=0}^{6-1} \frac{3}{6} \cdot f\left(i \cdot \frac{3}{6}\right) = \underbrace{\frac{3}{6} \cdot f\left(0 \cdot \frac{3}{6}\right)}_{0{,}5 \cdot f(0) = 0 = U_1} + \underbrace{\frac{3}{6} \cdot f\left(1 \cdot \frac{3}{6}\right)}_{0{,}5 \cdot f(0{,}5) \; 0{,}125 = U_2} + \dots + \underbrace{\frac{3}{6} \cdot f\left(5 \cdot \frac{3}{6}\right)}_{0{,}5 \cdot f(2{,}5) = 3{,}125 = U_6} = 6{,}875$

CAS: erst $f(x) := x^2$ definieren

Obersumme: $\sum_{i=1}^{6} \frac{3}{6} \cdot f\left(i \cdot \frac{3}{6}\right) = 11{,}375$

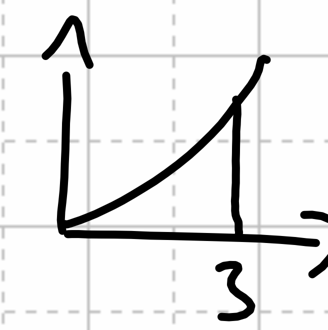
Anzahl der Rechtecke	Untersumme	Obersumme	Mittelwert
$n=6$	6,875	11,375	9,125
$n=12$	7,90625	10,1563	9,035
$n=50$	8,7318	9,2718	9,0018
$n=10000$	8,99865	9,00135	9

HA: Formel für $\lim_{n \to \infty}$

WGY12, MLk, 31.01.2020

Ober- und Untersummen

Für unendlich viele Rechtecke bei $f(x)=x^2$ und

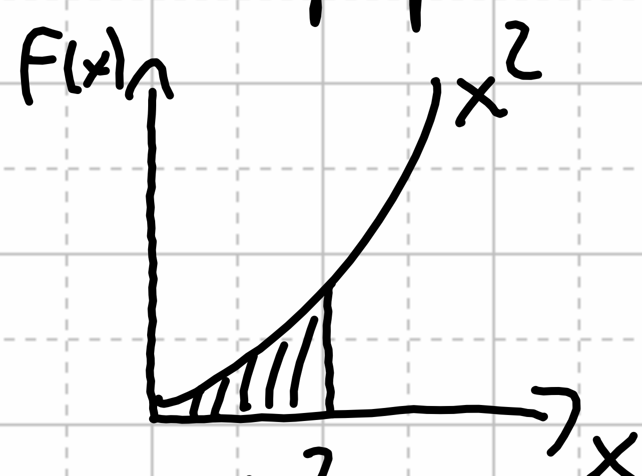


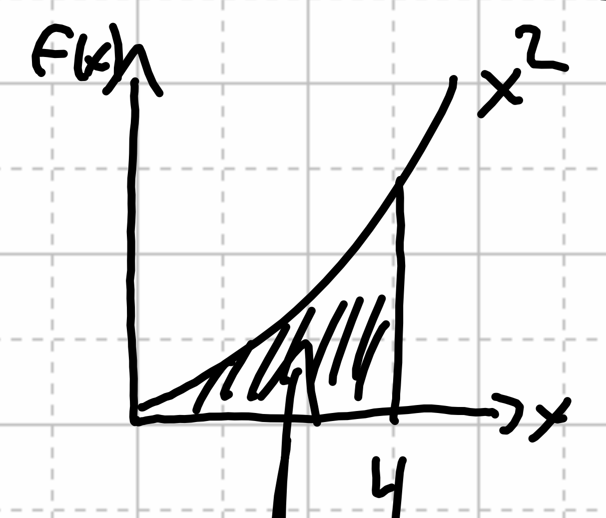
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{3}{n}\right)\right) = 9$$

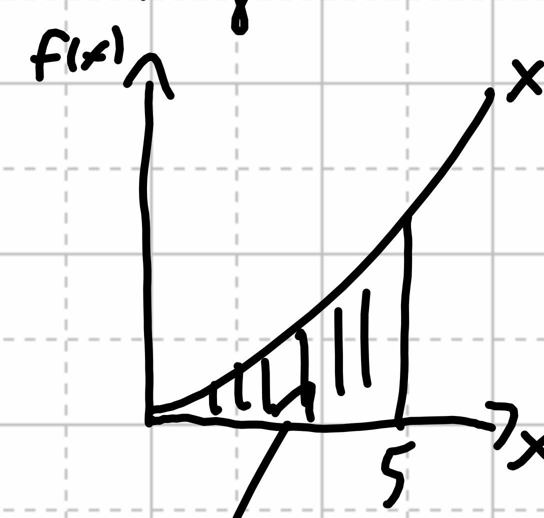
$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{3}{n}\right)\right) = 9$$

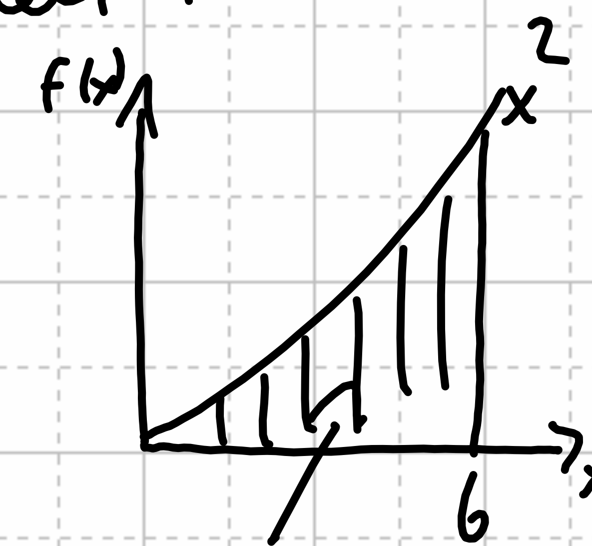
(vorher $f(x)=x^2$ definieren)

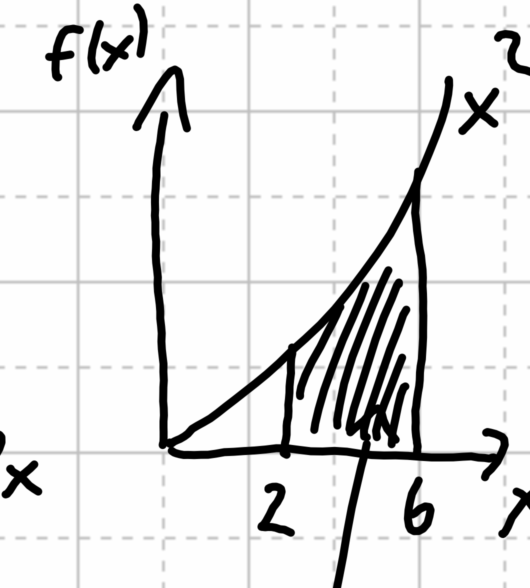
Wie groß ist der Flächeninhalt folgender Flächen?











$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{2}{n}\right)\right) = \frac{8}{3} \approx 2{,}\overline{6}$$

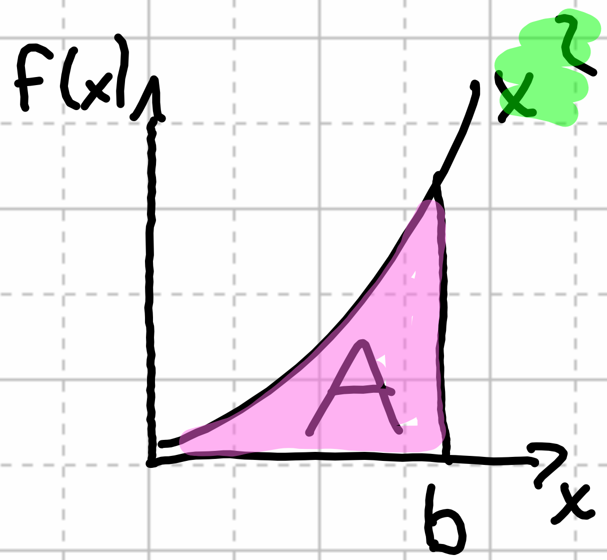
$\frac{64}{3} \approx 21{,}\overline{3}$

$\frac{125}{3} \approx 41.\overline{6}$

72

$72 - \frac{8}{3} \approx 69{,}\overline{3}$

Zusammenfassung: Der exakte Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Parabel $f(x) = x^2$ und einer Senkrechten durch b begrenzt wird, beträgt für:



b	A (exakter Flächeninhalt)
2	$\frac{8}{3}$
3	$9 = \frac{27}{3}$
4	$\frac{64}{3}$
5	$\frac{125}{3}$
6	$72 = \frac{216}{3}$
10	$\frac{1000}{3} = \frac{10^3}{3}$
12	$\frac{1728}{3} = \frac{12^3}{3} = 576$
b	$\frac{b^3}{3}$

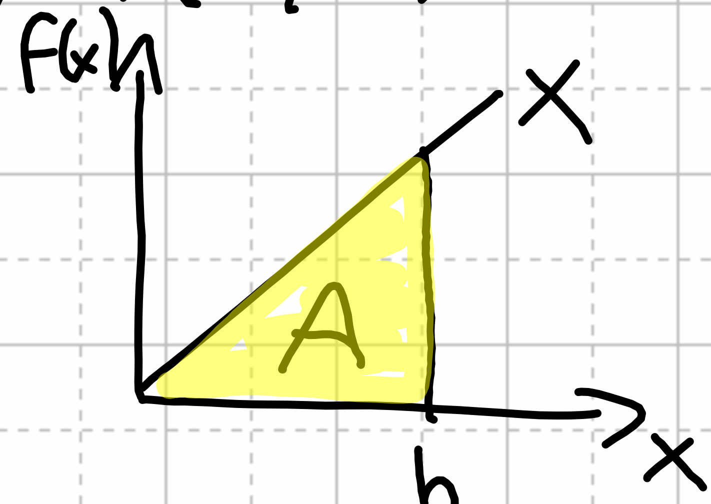
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{b}{n}\right) \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{b}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{b^3}{3}$$

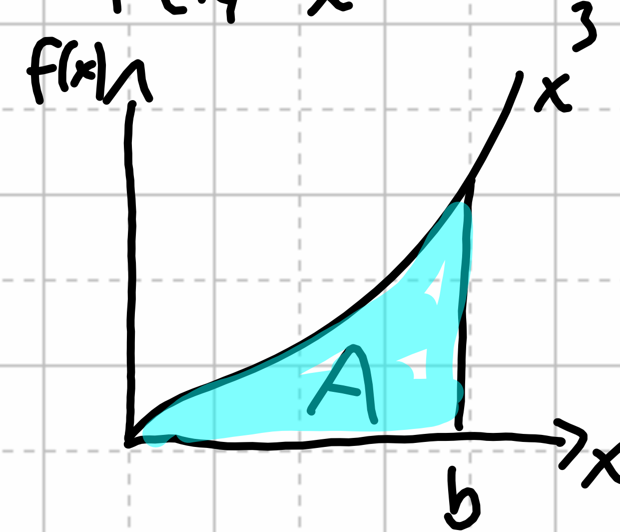
Aufgabe: Finden Sie eine vergleichbare Formel für $F(x) =$

a) $F(x) = x$



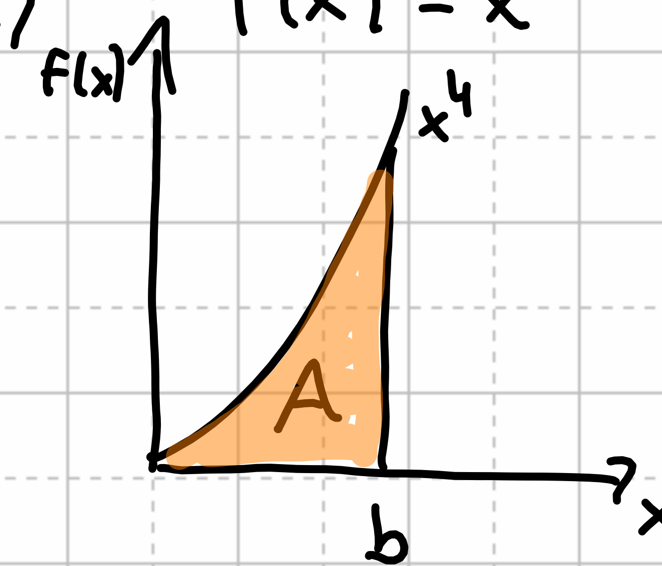
$A = \frac{b^2}{2}$

b) $F(x) = x^3$



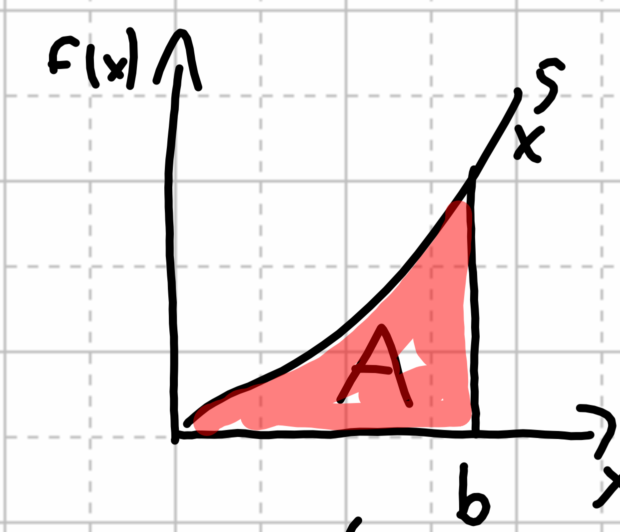
$A = \frac{b^4}{4}$

c) $F(x) = x^4$



$A = \frac{b^5}{5}$

d) $F(x) = x^5$



$A = \frac{b^6}{6}$

e) $F(x) = x^m$ (ohne Skizze)

$A = \frac{b^{m+1}}{m+1}$ (Vermutung)

ohne Beweis

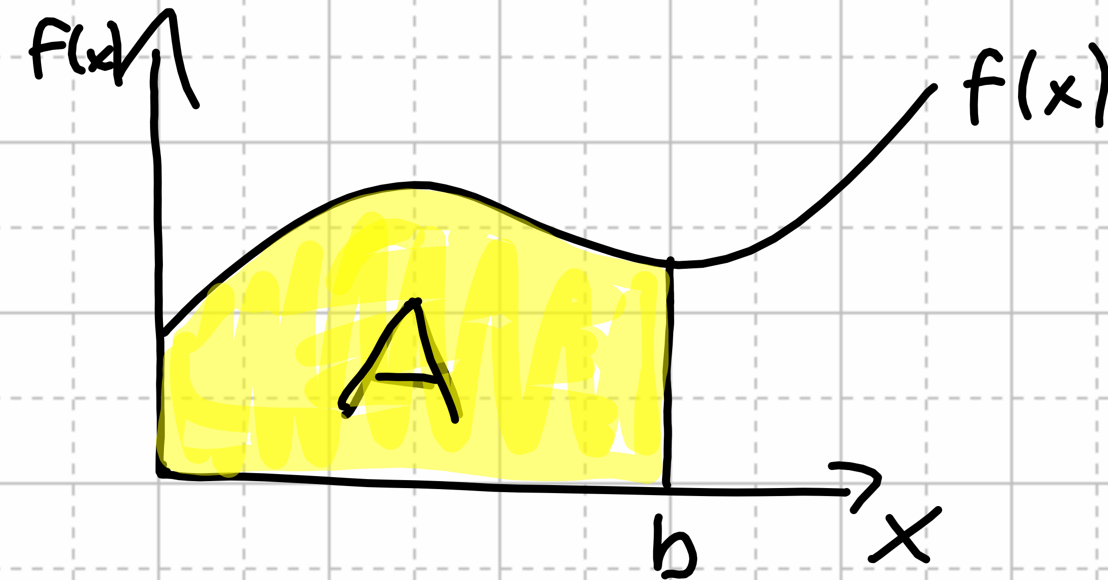
CAS-Eingabe am Bsp b)

1) Definiere $f(x) := x^3$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{b}{n}\right) \right) =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{b}{n}\right) \right) =$

HA: Ermitteln Sie den exakten Flächeninhalt von A für folgende Situation



a) $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad A =$

b) $f(x) = x^5 + x^3$ $\quad A =$

c) $f(x) = 2x^3 + x$

d) $f(x) = 5x^2 + 3x$

e) $f(x) = x^6 + 2x^4$

f) $f(x) = 6x^3 + 2x^4$

g) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 2x + 5$

$A =$

h) $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

$A =$