Stetigkeit

Definition 1: Eine Funktion f(x) heißt stetig in x_0, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$

Definition 2: Eine Funktion ist stetig an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ an der Stelle x_0 existiert und gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0 ist:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Eine Funktion f ist stetig, wenn sie stetig ist für alle x_0 aus dem Definitionsbereich.

Nicht-mathematisch: Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Hinweis: Alle ganzrationalen Funktionen und alle Exponentialfunktionen sind stetig.

Auf Stetigkeit untersucht werden müssen abschnittsweise definierte Funktionen und gebrochenrationale Funktionen, z.B. die Betragsfunktion oder $f(x) = \frac{1}{x}$.

<u>Beispiel 1 (konstante Funktionen)</u>

Z.B. ist **f(x) = 5** stetig.

Wählen Sie ein beliebiges x_0 und $\varepsilon > 0$. Jetzt müssen Sie ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle x, für die gilt: } |x - x_0| < \delta.$$

Man rechnet $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ nach: $|f(x) - f(x_0)| = |5 - 5| = 0 < \varepsilon$ gilt immer!

<u>Beispiel 2 (lineare Funktionen)</u>

Z.B. ist **f(x) = 3x – 2**. stetig.
Wählen Sie ein beliebiges x_0 und $\varepsilon > 0$. Jetzt müssen Sie ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle x, für die gilt: } |x - x_0| < \delta.$$

Man rechnet $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ nach:

$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 2 - ((3x_0) - 2)| = |\, 3x - 2 - 3x_0 + 2| = |3x - 3x_0| = |3(x - x_0)| = 3\cdot|x - x_0|$

Soll $3\cdot|x - x_0| < \varepsilon$ sein, so kommt man $\delta < \varepsilon/3$ hin, dann gilt nämlich:

$|f(x) - f(x_0)| = 3\cdot|x - x_0| < 3\cdot\varepsilon/3 = \varepsilon$

Beispiel 3 (Eine nicht-stetige Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \textit{für } x \leq 0 \\ 4 & \textit{für } x > 0 \end{cases}$$

f(x) ist nicht stetig in $x_0 = 0$. Setzen wir ε = 1. Wenn f(x) stetig in $x_0 = 0$ wäre, dann gäbe es ein δ > 0 und es gälte: |f(x) – f(0)|= |f(x) - 2| < 1 für alle | x – 0| = |x| < δ

Für x = 0,5 · δ gilt aber f(0,5 · δ) = 4 und damit erhält man:

1 > |f(x) – f(x_0)| = |4 - 2| = |2| = 2 und das ist ein Widerspruch!

Übungen

Untersuchen Sie folgende Funktionen an der Übergangsstelle auf Stetigkeit. Nutzen Sie sowohl die graphische Analyse (Funktion im CAS definieren und im Graphikfenster anzeigen lassen) als auch den limes-Befehl.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x \leq 0 \\ 3x & ,x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 4x - 1 & ,x > 2 \\ -1x^2 + 11 & ,x \leq 2 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 5x + 2 & ,x \leq -3 \\ -4x & ,x > -3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ,x > 0 \\ 3x & ,x \leq 0 \end{cases}$

Beispiel für die Untersuchung mit dem limes-Befehl auf folgenden Screenshots. Verwenden Sie beim limes-Befehl + und – in dem Kästchen oben rechts neben der Zahl, das bisher leer blieb. Stimmen die Grenzwerte überein, ist die Funktion an der Stelle stetig, sonst nicht.