



Achtung: Ergänzen Sie bei allen Antworten den korrekten Fachbegriff für die Anzahl der Möglichkeiten: Permutationen, Kombinationen oder Variationen (Vgl. Buch Seite 419)

Aufgabe 1

Beim Lotto in Irland müssen 6 Zahlen von 1 bis 47 richtig vorhergesagt werden. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln spielt dabei keine Rolle.

a) Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:

Anzahl Kugeln: _____ Anzahl Ziehungen: _____
Reihenfolge wichtig: o ja o nein Zurücklegen: o ja o nein

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sagt man die sechs gezogenen Zahlen richtig voraus?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den sechs gezogenen Kugeln genau vier richtig?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den sechs gezogenen Kugeln genau vier oder fünf richtig?
e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den sechs gezogenen Kugeln mindestens eine richtig?

Aufgabe 1
Beim Lotto in Irland müssen 6 Zahlen von 1 bis 47 richtig vorhergesagt werden. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln spielt dabei keine Rolle.

a) Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:
Anzahl Kugeln: 47 Anzahl Ziehungen: 6
Reihenfolge wichtig: o ja nein Zurücklegen: o ja nein

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sagt man die sechs gezogenen Zahlen richtig voraus?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den sechs gezogenen Kugeln genau vier richtig?
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den sechs gezogenen Kugeln genau vier oder fünf richtig?
e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den sechs gezogenen Kugeln mindestens eine richtig?

Aufgabe 2
Aus einer Klasse von 18 Schülern sollen vier Schüler zufällig ausgewählt werden, die die Klasse bei einem Staffellauf vertreten sollen. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten

a) vier Schüler auszuwählen für die Staffel
b) vier Schüler auszuwählen für die Staffel und die Reihenfolge in der sie laufen.

a) Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:
Anzahl Kugeln: _____ Anzahl Ziehungen: _____
Reihenfolge wichtig: o ja o nein Zurücklegen: o ja o nein
Anzahl Möglichkeiten: _____

b) Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:

Handwritten solutions:
1b) $P(6 \text{ Richtig}) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{41}{0}}{\binom{47}{6}} = \frac{1 \cdot 1}{10\,737\,573} = 0,000031309 = 0,0031309\%$
1c) $P(4 \text{ Richtig}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{41}{2}}{\binom{47}{6}} = \frac{15 \cdot 820}{10\,737\,573} = \frac{4100}{3579191} = 0,001146 = 0,1146\%$

$$P(4 \text{ oder } 5 \text{ Richtige}) = P(4 \text{ Richtige}) + P(5 \text{ Richtige}) =$$
$$1d) \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{41}{2}}{\binom{47}{6}} + \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{41}{1}}{\binom{47}{6}} = \frac{15 \cdot 820}{10.737.573} + \frac{6 \cdot 41}{10.737.573} = \frac{4182}{3579191} = 0,001168 = 0,117\%$$



$$P(\text{min d. 1 Richtige}) = 1 - P(0 \text{ Richtige}) =$$

$$1e) 1 - \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{41}{6}}{\binom{47}{6}} = 1 - \frac{4.496.388}{10.737.573} = \frac{2.080.395}{3.579.191} = 0,5814247 = 58,14\%$$

Aufgabe 2

Aus einer Klasse von 18 Schülern sollen vier Schüler zufällig ausgewählt werden, die die Klasse bei einem Staffellauf vertreten sollen. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten

- vier Schüler auszuwählen für die Staffel
- vier Schüler auszuwählen für die Staffel und die Reihenfolge in der sie laufen.

a) Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:

Anzahl Kugeln: **18** Anzahl Ziehungen: **4**
 Reihenfolge wichtig: o ja **x nein** Zurücklegen: o ja **x nein**

Anzahl Möglichkeiten: $\binom{18}{4} = 3060$ Kombinationen

b) Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:

Anzahl Kugeln: **18** Anzahl Ziehungen: **4**
 Reihenfolge wichtig: **x ja** o nein Zurücklegen: o ja **x nein**

Anzahl Möglichkeiten: $\frac{18!}{(18-4)!} = 73.440$ Permutationen

Aufgabe 3

Der Hersteller von Schlössern für Koffer testet verschiedene Varianten für die Sicherheit der Codes. Dabei stehen für ihn zwei Alternativen zur Auswahl: Variante 1: ein 3-stelliger Code bestehend aus drei Großbuchstaben des deutschen Alphabets Variante 2: ein 4-stelliger Zifferncode.

a) **Variante 1 (3-stelliger Code):** Simulation als Urnenmodell:

Anzahl Kugeln: **26** Anzahl Ziehungen: **3**
 Reihenfolge wichtig: **x ja** o nein Zurücklegen: **x ja** o nein

Anzahl Möglichkeiten: $26^3 = 17.576$ Variationen

b) **Variante 2 (4-stelliger Zifferncode):** Simulation als Urnenmodell:

Anzahl Kugeln: **10** Anzahl Ziehungen: **4**
 Reihenfolge wichtig: **x ja** o nein Zurücklegen: **x ja** o nein

Anzahl Möglichkeiten: $10^4 = 10.000$ Variationen



- c) Begründen Sie, welche der beiden Varianten sicherere ist.
Der Zahlencode ist sicherer, da es mehr Variationen gibt.
- d) Ermitteln Sie die maximale Dauer eines Brute-Force-Angriffs (also das Probieren aller möglichen Codes) für beide Varianten, wenn Sie davon ausgehen, dass man pro Sekunde fünf Milliarden Codes überprüfen kann.
Aufgabe nicht sinnvoll. Bitte ignorieren!

Aufgabe 4

Eine Klasse aus 21 Schülern wählt zuerst den Klassensprecher, dann seinen Vertreter und zum Schluss den Klassenbuchführer. Wie viele Wahlmöglichkeiten hat die Klasse, wenn eine Doppelbesetzung nicht möglich ist?

Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:

Anzahl Kugeln: **21**

Anzahl Ziehungen: **3**

Reihenfolge wichtig: **x ja** o nein

Zurücklegen: o ja **x nein**

Anzahl Möglichkeiten: $\frac{21!}{(21-3)!} = 7.980$ **Permutationen**

Aufgabe 5

Der Mathelehrer V. kann aus Platzgründen nur vier Bücher seiner Lieblingsreihe mit in den Urlaub nehmen. Die Lieblingsreihe umfasst insgesamt 41 Bände.

- a) Zwischen wie vielen Möglichkeiten muss er sich entscheiden?

Anzahl Kugeln: **41**

Anzahl Ziehungen: **4**

Reihenfolge wichtig: o ja **x nein**

Zurücklegen: o ja **x nein**

Anzahl Möglichkeiten: $\binom{41}{4} = 101.270$ **Kombinationen**

- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn er sein Lieblingsbuch der Reihe auf jeden Fall mitnehmen möchte?

Anzahl Kugeln: **40**

Anzahl Ziehungen: **3**

Reihenfolge wichtig: o ja **x nein**

Zurücklegen: o ja **x nein**

Anzahl Möglichkeiten: $\binom{40}{3} = 9.880$ **Kombinationen**



Aufgabe 6

Wie viele Anordnungen gibt es für 7 Personen in einer Reihe vor dem Verkaufsschalter?
Geben Sie die entsprechenden Informationen für die Simulation als Urnenmodell an:

Anzahl Kugeln: **7** Anzahl Ziehungen: **7**
Reihenfolge wichtig: **x ja** o nein Zurücklegen: o ja **x nein**

Anzahl Möglichkeiten: $7! = 5.040$ Permutationen

Aufgabe 7

Ein Künstler erhält die Möglichkeit von seinen 16 fertigen Bildern 10 in einer Galerie auszustellen.

a) Zwischen wie vielen Möglichkeiten muss er sich entscheiden?

Anzahl Möglichkeiten: $\binom{16}{10} = 8.008$ Kombinationen

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn er seine beiden Lieblingsbilder auf jeden Fall ausstellen möchte?

Anzahl Möglichkeiten: $\binom{14}{8} = 3.003$ Kombinationen

Aufgabe 8

Aus einer Urne mit 12 schwarzen und 7 weißen Kugeln werden 8 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau

a) 4 schwarze Kugeln b) 2 weiße darunter?

$$a) P(4 \text{ schwarze Kugeln}) = \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{7}{4}}{\binom{19}{8}} = \frac{495 \cdot 35}{75.582} = \frac{1925}{8398} = 0,2292 = 22,92\%$$

$$b) P(2 \text{ weiße Kugeln}) = \frac{\binom{12}{6} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{19}{8}} = \frac{924 \cdot 21}{75.582} = \frac{1078}{4199} = 0,2567 = 25,67\%$$



Aufgabe 9

Für die Erstellung eines neuen Sicherheitscodes für Smartphones stehen zwei Alternativen zur Auswahl. Entweder ein 8-stelliger Code bestehend aus den Ziffern 0 bis 9 oder ein 5-stelliger Code bestehend aus den 94 möglichen Ziffern, Klein- und Großbuchstaben und Sonderzeichen. Welche der beiden Varianten ist die sicherere? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9
8-stelliger Ziffercode: $n = 10$ $k = 8$ $Z \ m \ Z \ m \ R$
 $\Rightarrow n^k = 10^8 = 100\ 000\ 000$ Variationen
5-stelliger Passwort: $n = 94$ $k = 5$ $Z \ m \ Z \ m \ R$
 $\Rightarrow n^k = 94^5 = 7\ 379\ 040\ 224$ Variationen
 \Rightarrow Das Passwort mit 5 Zeichen bzw. Stellen ist sicherer als der 8-stellige Zahlencode.
mit 12 Stellen (Passwort): $94^{12} = 475\ 920\ 314\ 814\ 253\ 376\ 475\ 136$ Variationen
 \rightarrow Bei 5 000 000 000 Passwörtern pro Sekunde benötigt ein Computer
3 018 270 Jahre um alle Möglichkeiten durchzuprobieren (Brute-Force-Attacke)

Das 5-stellige Passwort ist sicherer, da es mehr mögliche Variationen bietet. Generell ist die Kombination aus Länge des Passworts und den zur Verfügung stehenden Zeichen pro Stelle entscheidend für die Sicherheit. Ein 12-stelliger Zahlencode als Passwort ist per Computer schnell zu knacken, wenn man weiß, dass es sich um einen reinen Zahlencode handelt. Die $10^{12} = 12.000.000.000.000$ (12 Milliarden) Variationen sind bei 5 Milliarden Versuchen pro Sekunde in weniger als 4 Minuten durchprobiert.

Aufgabe 10

Der Betreiber einer Webseite programmiert eine automatische Überprüfung der Sicherheit des eingegebenen Kundenpassworts. Dabei stehen für ihn zwei Alternativen zur Auswahl: Variante 1: ein 5-stelliger Code bestehend aus den 52 kleinen und großen Buchstaben des Alphabets oder Variante 2: ein 4-stelliger Code bestehend aus den 94 möglichen Ziffern, Klein- und Großbuchstaben und Sonderzeichen. Begründen Sie, welche der beiden Varianten sicherere ist.

Variante 1: $52^5 = 380.204.032$ Variationen Variante 2: $94^4 = 78.074.896$ Variationen
 \Rightarrow Variante 1 ist sicherer.



Aufgabe 11

In der Fernseher-Abteilung soll ein Gang neu mit Ausstellungsstücken verschiedener Modelle gestaltet werden. Dabei können 8 verschiedene Geräte nebeneinander aufgestellt werden. Der Praktikant Recep aus der Höheren Handelsschule wird damit beauftragt, sich eine bestimmte Reihenfolge zu überlegen und dabei verkaufsstrategische Überlegungen zu berücksichtigen.

- Die 8 Modelle können aus 20 verschiedenen Modellen ausgewählt werden. Ermitteln Sie die Anzahl der möglichen Kombinationen, wenn Recep zufällig die 8 Modelle auswählt.
- Von einem der wichtigsten Vertragspartner des Elektronik-Fachmarktes sind bei den 20 zur Auswahl stehenden Modellen genau 10. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Auswahl der 8 Ausstellungsstücke, genau 5 von diesem Partner sind.
- Nach der Auswahl der acht Ausstellungsgeräte müssen diese nun angeordnet werden. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen.
- Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wenn an den beiden Außenpositionen die zwei Top-Angebote stehen sollen.

a) **Binomialkoeffizient** $\binom{20}{8} = 125970$ **mögliche Kombinationen bei zufälliger Auswahl.**

$$\frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{20}{8}} = \frac{252 \cdot 120}{125970} = \frac{1008}{4199}$$

b) $= 0,2401 = 24,01\%$

Die Wahrscheinlichkeit für genau 5 Geräte des Vertragspartners beträgt 24,01%.

c) $8! = 40320$ mögliche Permutationen.

d) Es gibt $2 \cdot 6! = 1440$ Permutationen.