



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: **Zwischentest Nr. 1**
**Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme**

Datum:
04.05.2020

Hinweis: Achten Sie bei der Dokumentation Ihrer Lösungen, dass es sich bei der Ergebnismenge Ω und bei (Elementar)ereignissen mathematisch um Mengen handelt und sie daher auch als Menge, also mit Mengenklammern $\{ \}$ dargestellt werden müssen! Zum besseren Verständnis ist jeweils ein Beispiel angegeben:

Aufgabe 1

Untersucht wird das folgende Zufallsexperiment: **Einfacher** Wurf eines gleichseitigen **Ikosaeders**. Das ist ein Körper, der zwanzig gleichseitige Dreiecke als Flächen besitzt. Die zwanzig Seiten sind von 1 bis 20 nummeriert. Ein Ereignis gilt als eingetroffen, wenn der Ikosaeder auf einer seiner zwanzig Flächen zum Liegen kommt.

- a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an. (2P.)
- b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Menge dar.
 - E1: Es wird eine Primzahl gewürfelt. (2P.)
 - E2: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt (2P.)
 - E3: Es wird eine Zahl größer als 11 gewürfelt. (2P.)
 - E4: Es wird eine durch 6 teilbare Zahl gewürfelt. (2P.)
 - E5: $E1 \cap E2$ (2P.)
 - E6: $E1 \cap E4$ (2P.)
 - E7: $E2 \cup \overline{E3}$ (2P.)
 - E8: $E4 \cap \overline{E4}$ (2P.)

Beispiel: Ereignis A: "Die gewürfelte Zahl ist durch 5 teilbar." $\Rightarrow A = \{5; 10; 15; 20\}$

Tipp: Schreiben Sie bei den Ereignissen E5 – E8 auch die beteiligten Mengen auf, also z.B.

$$E5 = E1 \cap E2 = \{...\} \cap \{...\} = \{...\}$$

Aufgabe 2

Bei einem Roulette-Rad gibt es 37 Felder, die durchnummeriert sind von 0 bis 36. Die 0 hat die Farbe grün, die restlichen Felder sind zur Hälfte rot bzw. schwarz. Lea und Patrick diskutieren, mit welchem Ereignis die Gewinnchancen größer sind. Patrick schlägt vor, auf alle Zahlen, die durch 4 teilbar sind zu setzen und Lea meint, die Gewinnchance wäre größer, wenn man auf alle Primzahlen setzt. Entscheiden Sie, wer von beiden Recht hat, indem Sie wie folgt vorgehen:

- a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.
- b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Menge dar:
 - E_L : Die Kugel fällt auf ein Feld mit einer Primzahl
 - E_P : Die Kugel fällt auf ein Feld mit einer Zahl, die durch vier teilbar ist.
- c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse E_L und E_P an und entscheiden Sie, ob Lea oder Patrick Recht hat.

Erinnerung: Bei Laplace-Versuchen gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Dabei gibt $|A|$ die Mächtigkeit einer Menge an, also die Anzahl der Elemente in der Menge!



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: Zwischentest Nr. 1
Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme

Datum:
04.05.2020

Aufgabe 3

Beim Bingo werden aus einer Urne mit Kugeln, die von 1 bis 75 nummeriert sind, Kugeln zufällig gezogen.

a) Geben Sie folgende Ereignisse als Menge an.

E1: Es wird eine durch 5 teilbare Zahl gezogen.

E2: Es wird eine ungerade Zahl gezogen.

E3: Es wird eine Zahl gezogen, die größer als 50 ist.

E4: Es wird eine Primzahl gezogen, die kleiner als 30 ist.

E5: Es wird eine Zahl gezogen, die kleiner als 4 oder größer als 70 ist.

E6: $E_1 \cap E_2$

E7: $E_3 \cap E_4$

E8: $E_5 \cup E_1$

E9: $(\overline{E_2} \cup E_2) \cap \overline{E_5}$

E10: $(\overline{E_4} \cap E_4) \cup \Omega$

b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $P(E_2 \cup E_3)$
- $P(E_1 \cup E_2)$
- $P(E_4)$
- $P(E_3 \cap E_4)$
- $P(E_3 \cup E_4)$

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie bei Aufgabe 1 vor und beachten Sie bei Aufgabe b) den Satz von Sylvester und das 3. Axiom von Kolmogoroff.

Aufgabe 4

Stellen Sie das Zufallsexperiment „Dreifacher Münzwurf“ mit den Ergebnissen „W“ (Wappen) und „Z“ (Zahl) als Baumdiagramm dar und geben Sie die Ergebnismenge Ω und deren Mächtigkeit an.

- Formulieren Sie ein Ereignis für die Menge $A = \{WWW, WWZ, WZW, ZWW\}$
- Geben Sie das Ereignis B: „Es wird genau einmal Zahl geworfen.“ als Menge an.
- Geben Sie das Ereignis C: „Es wird mindestens einmal Zahl geworfen.“ als Menge an.
- Welche Mächtigkeit hat Ω wenn man den Münzwurf viermal (fünfmal, sechsmal) durchführt?

Beispiel: Für das Ereignis $E = \{ZZZ\}$ könnte man formulieren: $E =$ „Es wird genau dreimal Zahl geworfen“ oder „Es wird keinmal Kopf geworfen.“



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: Zwischentest Nr. 1
Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme

Datum:
04.05.2020

Aufgabe 5

Stefan und Janine spielen ein Würfelspiel. Jeder würfelt einmal mit einem idealen Würfel. Das Ergebnis wird in der Form $(4,1)$ angegeben, wobei die erste Zahl die Augenzahl von Stefan angibt und die zweite Zahl die Augenzahl von Janine. Das bedeutet also, wenn Stefan eine 4 wirft und Janine eine 2, so wird das Ergebnis als $(4,1)$ angegeben.

- a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.
Geben Sie folgende Ereignisse vollständig als Menge an und ermitteln Sie die Mächtigkeit der Mengen.
- b) Ereignis A: Stefan würfelt eine kleinere Zahl als Janine.
c) Ereignis B: Beide würfeln keine Primzahl.
d) Ereignis C: Janine würfelt eine 5.
e) Ereignis D: Beide würfeln die gleiche Zahl.

Beispiel: Das Ereignis E: "Stefan würfelt eine 3." kann als $E = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$ angegeben werden.

Aufgabe 6

Bei der Klassenfahrt der WHB11 an die Nordsee gibt es für die Schüler an zwei Tagen eine Wahl. Am 2. Tag können die Schüler an einer Wattwanderung teilnehmen und am 3. Tag an einer Exkursion zum Windradpark. Aus der Erfahrung der letzten Jahre kann man davon ausgehen, dass 30 % der Schüler an beiden Ausflügen teilnehmen und dass 55% der Schüler die Wattwanderung mitmachen. An einem der beiden Ausflüge müssen die Schüler teilnehmen.

Es gilt: A = "Schüler nimmt an Wattwanderung teil." und B = "Schüler nimmt an Exkursion zum Windradpark teil."

Ermitteln Sie mit Hilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel, welcher Anteil der Schüler

- a) nur an der Exkursion zum Windradpark teilnimmt.
b) an keinem der beiden Ausflüge teilnimmt.
c) zum Windradpark fährt.

	A	\bar{A}	
B			
\bar{B}			



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: **Zwischentest Nr. 1**
**Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme**

Datum:
04.05.2020

Aufgabe 7

In einem Unternehmen werden spezielle Mikrochips auf zwei Maschinen hergestellt. Dabei produziert die ältere Maschine A 40% der gesamten Chips und hat eine Ausschussquote von 10%. Die modernere Maschine B produziert Ausschuss mit einer Quote von nur 3%.

- Stellen Sie die Situation in einem vollständigen Baumdiagramm dar.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Chip Ausschuss, kann also nicht verkauft werden?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Chip von der Maschine B gefertigt worden und kein Ausschuss?

Aufgabe 8

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob sie zutreffen oder nicht. Sie müssen nicht begründen!

Aussage	Trifft zu	Trifft nicht zu
1. Bei einem Münzwurf mit einer idealen Münze handelt es sich um ein Laplace-Experiment.		
2. Die Anzahl der Elementarereignisse eines Zufallsexperiments entspricht der Mächtigkeit von Ω .		
3. Die Mächtigkeit von Ω beim zweifachen Würfeln mit einem normalen Würfeln beträgt 12.		
4. Der Wert für eine Wahrscheinlichkeit liegt immer zwischen 0% und 100%. Dabei sind 0% und 100% auch möglich.		
5. Die Vereinigung von Ereignis und Gegenereignis ergibt nicht immer Ω .		
6. Bei einem Laplace-Experiment haben alle Ergebnisse unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.		
7. Nach Kolmogoroff muss für ein Ereignis E immer $P(E) > 0$ gelten.		
8. Das Gegenereignis von Ω enthält immer mindestens ein Ergebnis.		
9. Die Wahrscheinlichkeit für einen „Pasch“ beim zweifachen Würfeln beträgt mehr als 15%		

Bearbeitungszeit: ca. 180 Minuten (mit Nachschlagen und Recherchieren)

In einem Folgetest, sollten Sie versuchen, die Aufgaben ohne Nachschlagen zu lösen. Dann haben Sie entsprechend weniger Zeit.

Sie dürfen die Aufgaben in mehreren Etappen machen, protokollieren Sie dabei Ihre Zeit und notieren am Ende die Gesamtdauer der Bearbeitung!

Da alle Hilfsmittel erlaubt sind, ist es nicht erlaubt, eine Aufgabe nicht zu bearbeiten! Sie haben nach wie vor, die Möglichkeit, mir E-Mails zu schreiben oder unter der bekannten Nummer anzurufen.

Abgabe per E-Mail bis spätestens Mittwoch, den 6. Mai 2020!



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: Zwischentest Nr. 1
Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme

Datum:
04.05.2020

Lösungen

Aufgabe 1:

$$\Omega = \{1,2,3,\dots,17,18,19,20\}$$

$$E_1 = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

$$E_2 = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

$$E_3 = \{12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$$

$$E_4 = \{6,12,18\}$$

$$E_5 = \{2,3,5,7,11,13,17,19\} \cap \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\} = \{2\}$$

$$E_6 = \{2,3,5,7,11,13,17,19\} \cap \{6,12,18\} = \{\}$$

$$E_7 = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} = \\ \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 12,14,16,18,20\}$$

$$E_8 = \{6,12,18\} \cap \{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,19,20\} = \{\}$$

Aufgabe 2:

$$\Omega = \{0,1,2,3,\dots,33,34,35,36\}$$

$$E_L = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31\}$$

$$E_P = \{4,8,12,16,20,24,28,32,36\}$$

c) Die Mächtigkeit von E_L ist größer, daher hat Lea Recht: $|E_L|=11$ und $|E_P|=9$. Da es sich um einen Laplace-Versuche handelt, sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich und es gilt für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse: $P(E_L) = 11/37$ und $P(E_P) = 9/37$

Aufgabe 3:

$$\Omega = \{1,2,3,\dots,73,74,75\}$$

$$E_1 = \{5,10,15,\dots,65,70,75\}$$

$$E_2 = \{1,3,5,\dots,71,73,75\}$$

$$E_3 = \{51,52,53,\dots,73,74,75\}$$

$$E_4 = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$$

$$E_5 = \{1,2,3,71,72,73,74,75\}$$

$$E_6 = \{5,10,15,\dots,65,70,75\} \cap \{1,3,5,\dots,15,71,73,75\} = \{5,15,25,35,45,55,65,75\}$$

$$E_7 = \{51,52,53,\dots,73,74,75\} \cap \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\} = \{\}$$

$$E_8 = \{1,2,3,71,72,73,74,75\} \cup \{5,10,15,\dots,65,70,75\} =$$

$$\{1,2,3,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,71,72,73,74,75\}$$

$$E_9 = (\bar{E}_2 \cup E_2) \cap \bar{E}_5 = \Omega \cap \bar{E}_5 = \bar{E}_5 = \{4,5,6,7,8,\dots,67,68,69,70\}$$

$$E_{10} = (\bar{E}_4 \cap E_4) \cup \Omega = \{\} \cup \Omega = \Omega$$

- $P(E_2 \cup E_3) = P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 \cap E_3) = 38/75 + 25/75 - 13/75 = 50/75 = 2/3$
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 15/75 + 38/75 - 8/75 = 45/75 = 3/5$
- $P(E_4) = 10/75 = 2/15$
- $P(E_3 \cap E_4) = P(E_7) = 0/75 = 0$
- $P(E_3 \cup E_4) = P(E_3) + P(E_4) - P(E_3 \cap E_4) = 25/75 + 10/75 - 0/75 = 35/75 = 7/15$

Aufgabe 4:

Vgl. Buch

a) A: „Es wird mindestens zweimal Wappen geworfen.“ oder „Es wird höchstens einmal Zahl geworfen.“

$$b) B = \{ZWW, WZW, WWZ\}$$

$$b) C = \{ZWW, WZW, WWZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ\}$$

d) viermal: 16, fünfmal: 32, sechsmal: 64



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: Zwischentest Nr. 1
Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme

Datum:
04.05.2020

Aufgabe 5:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,4), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow |\Omega| = 36$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$$

$$\Rightarrow |A| = 15$$

$$B = \{(1,1), (1,4), (1,6), (4,1), (4,4), (4,6), (6,1), (6,4), (6,6)\} \Rightarrow |B| = 9$$

$$C = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\} \Rightarrow |C| = 6$$

$$D = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow |D| = 6$$

Aufgabe 6:

A: Schüler macht Wattwanderung und B: Schüler fährt zum Windrad

	A	\bar{A}	
B	30%	45% = 45% - 0%	75% = 30%+45%
\bar{B}	25% = 55% - 30%	0%	25% = 100% - 75%
	55%	45% = 100% - 55%	100%

Fett gedruckte Zahlen aus der Aufgabe

- a) nur an der Exkursion zum Windradpark teilnimmt: 25%
- b) an keinem der beiden Ausflüge teilnimmt: 0%
- c) zum Windradpark fährt 75%

Ausführliche Lösung auf der Homepage

Aufgabe 7:

b) 5,8% c) 58,2%

Ausführliche Lösung auf der Homepage

Aufgabe 8:

Aussage	Trifft zu	Trifft nicht zu
1. Bei einem Münzwurf mit einer idealen Münze handelt es sich um ein Laplace-Experiment.	x	
2. Die Anzahl der Elementarereignisse eines Zufallsexperiments entspricht der Mächtigkeit von Ω .	x	
3. Die Mächtigkeit von Ω beim zweifachen Würfeln mit einem normalen Würfeln beträgt 12.		x
4. Der Wert für eine Wahrscheinlichkeit liegt immer zwischen 0% und 100%. Dabei sind 0% und 100% auch möglich.	x	
5. Die Vereinigung von Ereignis und Gegenereignis ergibt nicht immer Ω .		x
6. Bei einem Laplace-Experiment haben alle Ergebnisse unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.		x
7. Nach Kolmogoroff muss für ein Ereignis E immer $P(E) > 0$ gelten.		x
8. Das Gegenereignis von Ω enthält immer mindestens ein Ergebnis.		x
9. Die Wahrscheinlichkeit für einen „Pasch“ beim zweifachen Würfeln beträgt mehr als 15%	x	



W-GY12 - LK, Mathematik
Thema: **Zwischentest Nr. 1**
**Stochastische Grundbegriffe – Laplace-Versuche
und Baumdiagramme**

Datum:
04.05.2020

Erläuterungen zu 8:

1. Ja, da alle Ausgänge (Kopf und Zahl) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 0,5 eintreten.
2. Ja, da ein Elementarereignis die Mächtigkeit 1 hat und die Vereinigung aller Elementarereignisse die Ergebnismenge Ω ergibt.
3. Nein, die Mächtigkeit ist 36. $|\{(1,1), (1,2), \dots, (6,4), (6,5), (6,6)\}| = 36$
4. Ja, das ist die Folgerung aus den ersten beiden Axiomen von Kolmogoroff.
5. Nein, $A \cup \bar{A} = \Omega$ gilt immer, ebenso wie $A \cap \bar{A} = \{\}$.
6. Nein, alle Ergebnisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein.
7. Nein, es gilt: $P(E) \geq 0$.
8. Nein, siehe 5. Das Gegenereignis von Ω ist die leere Menge $\{\}$.
9. Ja, sie beträgt $1/6$, also 16,67%.