WGY13 MLK 19.08.2020

Binomialverteilung

Einstiegsaufgabe Binomialverteilung

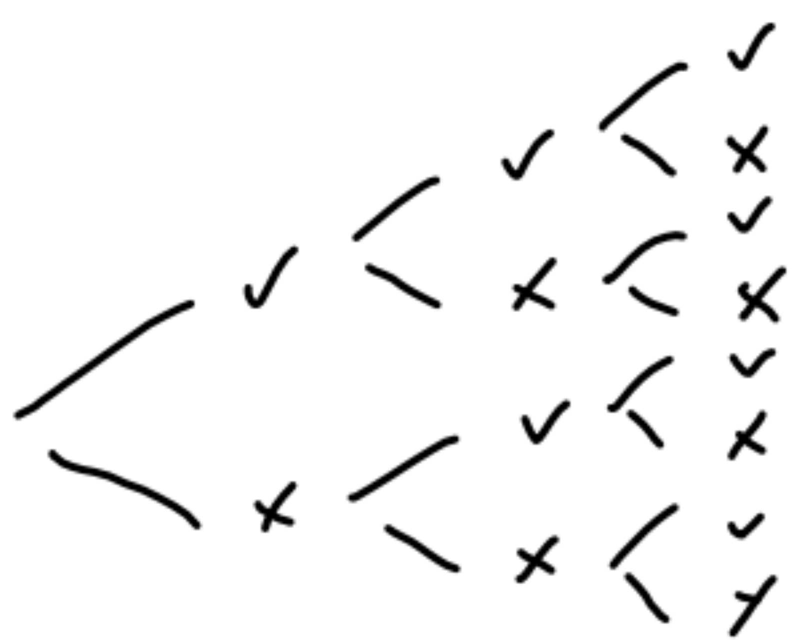
Die Jarvis GmbH stellt Projektoren her und bezieht die Linsen, die in die Projektoren eingebaut werden, von Zulieferern aus der Optischen Industrie. Nach Lieferproblemen bezüglich der Qualität wurde der Zulieferer gewechselt. Neuerdings liefert der Lieferant Argus GmbH alle Linsen in einer besseren Qualität, seine Ausschussquote beträgt 2,5%. Es wird vereinbart, dass die Jarvis GmbH einen Sonderrabatt von 20% erhält, falls in einer Liefercharge von 200 Stück mehr als acht Linsen Ausschuss sind. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt.

Vorbereitung:

1. Lesen Sie im Buch die Seiten 453 – 455 oben (einschließlich Formel von Bernoulli).
2. Erklären Sie mit eigenen Worten, was ein Bernoulli-Versuch ist.
3. Erklären Sie den Begriff „Bernoulli-Kette".
4. Stellen Sie den Test von drei Linsen (Ausschuss oder nicht) in einem Baumdiagramm dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen drei Linsen keine (genau eine, genau zwei, genau drei, höchstens eine, mehr als eine) Ausschuss ist.
   Hinweis: Erinnern Sie sich an die Begriffe „Zufallsvariable" und „Wahrscheinlichkeitsverteilung".

Schätzungen

Bora : 4%
Aaron : 4,5%
Can : 5%
Bavi : 3.5%
Simge : 5,5%
Vanessa : 3,7%
Muhammed : 3%



Bernoulli-Versuch: Zufallsversuch mit genau zwei möglichen Ereignissen (allgemein E: Treffer oder Erfolg und $\overline{E}$: Niete oder Misserfolg)

Für die Trefferwahrscheinlichkeit verwendet man p und damit ist die W. für „keinen Treffer" genau $1-p$ oder auch $1-p=q$

Bsp: Münzwurf (K oder Z), Qualitätstest (Ausschluss oder nicht)
Würfeln (6 oder keine 6)

Bernoulli-Kette Mehrfaches oder wiederholtes Durchführen eines Bernoulli-Versuchs. Zu beachten ist, dass

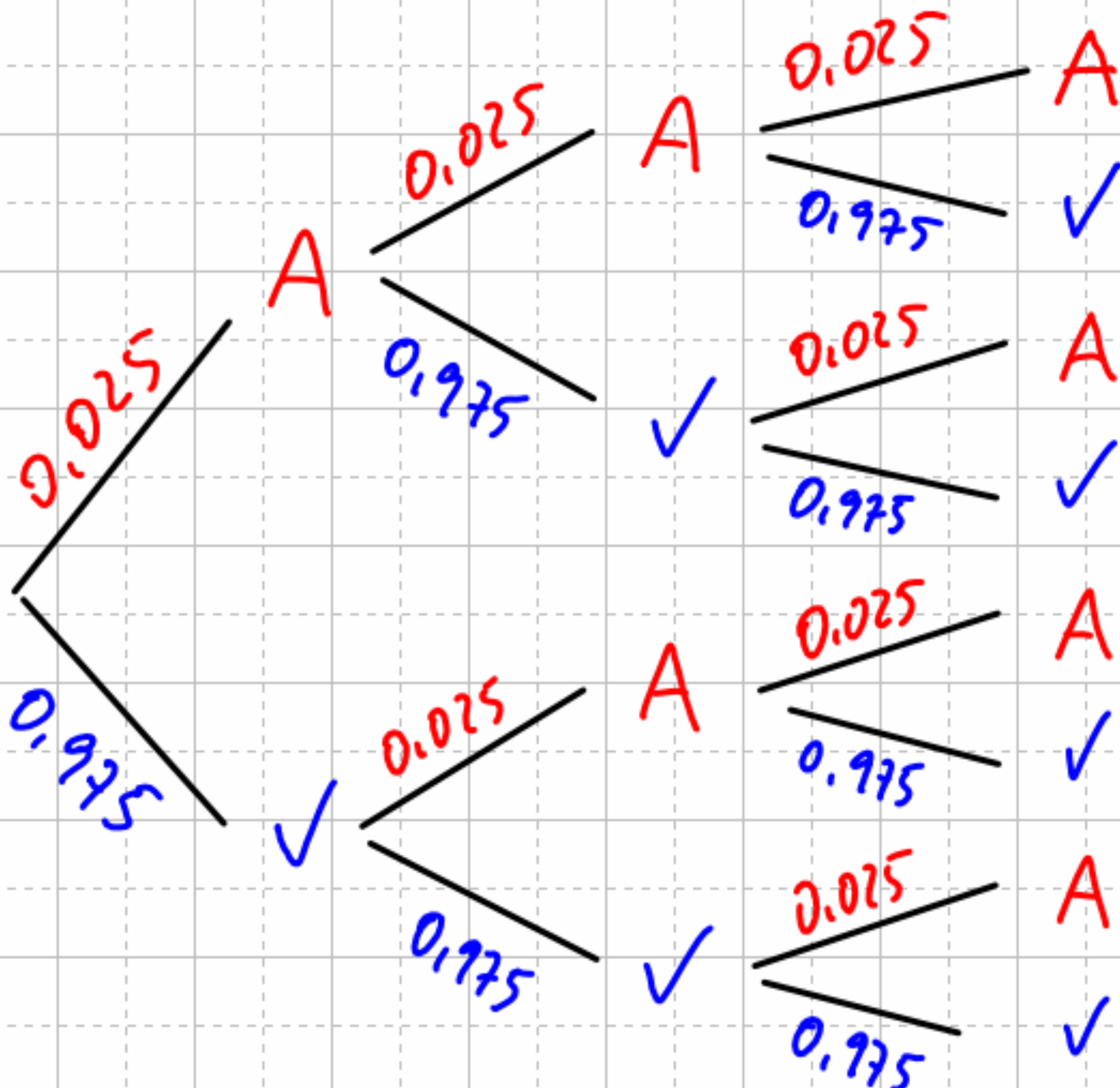
- die Trefferwahrscheinlichkeit p bei jedem Versuch gleich ist.
- die einzelnen Versuche voneinander unabhängig sind, d.h. das Ergebnis eines Versuchs die W. für einen Treffer beim nächsten Versuch nicht beeinflusst.

Bsp: 10-maliger Münzwurf, Test von 3 Linsen, 30-mal Würfeln

Die Anzahl der Versuche wird mit n bezeichnet, das ist die Länge der Bernoulli-Kette.

4) Baumdiagramm (Test von drei Linsen)

A = Ausschluss ✓ = ok (kein Ausschluss) oder $\bar{A}$



$P(AAA) = 0{,}025^3 = 0{,}000016$

$P(AA✓) = 0{,}025^2 \cdot 0{,}975 = 0{,}000609$

$P(A✓A) = 0{,}025^2 \cdot 0{,}975 = 0{,}000609$

$P(A✓✓) = 0{,}025 \cdot 0{,}975^2 = 0{,}023766$

$P(✓AA) = 0{,}025^2 \cdot 0{,}975 = 0{,}000609$

$P(✓A✓) = 0{,}025 \cdot 0{,}975^2 = 0{,}023766$

$P(✓✓A) = 0{,}025 \cdot 0{,}975^2 = 0{,}023766$

$P(✓✓✓) = 0{,}975^3 = 0{,}926859$

4) Definition Zufallsvariable

ZV X: Anzahl Linsen, die Ausschuss sind
↳ Treffer ≙ Linse, die Ausschuss ist
↳ Mögliche Werte von X: $k = 0, 1, 2, 3$

ZV Y: Anzahl Linsen, die kein Ausschuss sind
↳ Treffer ≙ Linse, die ok ist
↳ Mögliche Werte von Y: $k = 0, 1, 2, 3$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

k (Anz. Treffer)	$P(X=k)$	
0	0,926859	$= 1 \cdot 0{,}025^0 \; 0{,}975^3 = \binom{3}{0} \cdot 0.025^0 \cdot 0.975^3 = P(Y=3)$
1	0,071298	$= 3 \cdot 0{,}025^1 \cdot 0.0975^2 = \binom{3}{1} \cdot 0.025^1 \cdot 0.975^2 = P(Y=2)$
2	0,001827	$= 3 \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}975^1 = \binom{3}{2} \cdot 0.025^2 \cdot 0.975^1 = P(Y=1)$
3	0,000016	$= 1 \cdot 0{,}025^3 \cdot 0{,}0975^0 = \binom{3}{3} \cdot 0.025^3 \cdot 0{,}975^0 = P(Y=0)$

Dreieck von Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Formel von Bernoulli (S. 455)

Für eine Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p gilt für die Wahrscheinlichkeit genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X=k) = B(n,p,k) = \underbrace{\binom{n}{k}} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}$$

für $k = 0, 1, \ldots, n$

Anzahl der Pfade im Baumdiagramm mit genau k Treffern (Binomialkoeffizient „n über k")

→ CAS: nCr menu → 5 → 3 nCr(n,k)

Zufallsvariable X, die die Anzahl Treffer angibt, heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p, die zugehörige Verteilung heißt Binomialverteilung.

S. 464 Nr. 2 Übung Formel von Bernoulli

1) ZV X : Anzahl fehlerhafter Lampen (Definition Zufallsvariable)

Treffer

2) $X \sim B(\underbrace{20}_{\text{Länge der Kette}}, \underbrace{0{,}05}_{\text{Trefferw.}})$ (Angabe der Verteilung der ZV)

$$P(X=1) = B(20, 0{,}05, 1) = \binom{20}{1} \cdot 0{,}05^{1} \cdot \underbrace{0{,}95}_{=1-0{,}05}^{19 = 20-1} = 0{,}3774$$

nCr(20,1)

$$P(X=2) = B(20, 0{,}05, 2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^{2} \cdot 0{,}95^{18} = 0{,}1887$$

$$P(X=3) = B(20, 0{,}05, 3) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}05^{3} \cdot 0{,}95^{17} = 0{,}0596$$

CAS $P(X=3) = 0.0596$

menu → 5 → 5 → A Binomial Pdf → n = 20 p = 0,05 X-Wert 3

HA: S. 464, Nr 1

↳ mit Formel von Bernoulli

↳ Tabelle ablesen (wenn möglich)

↳ CAS menu → 5 → 5 → A