WGY13 MLK 19.08.2020

Binomialverteilung

Einstiegsaufgabe Binomialverteilung

Die Jarvis GmbH stellt Projektoren her und bezieht die Linsen, die in die Projektoren eingebaut werden, von Zulieferern aus der Optischen Industrie. Nach Lieferproblemen bezüglich der Qualität wurde der Zulieferer gewechselt. Neuerdings liefert der Lieferant Argus GmbH alle Linsen in einer besseren Qualität, seine Ausschussquote beträgt 2,5%. Es wird vereinbart, dass die Jarvis GmbH einen Sonderrabatt von 20% erhält, falls in einer Liefercharge von 200 Stück mehr als acht Linsen Ausschuss sind. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt.

Vorbereitung:

1. Lesen Sie im Buch die Seiten 453 – 455 oben (einschließlich Formel von Bernoulli).
2. Erklären Sie mit eigenen Worten, was ein Bernoulli-Versuch ist.
3. Erklären Sie den Begriff „Bernoulli-Kette".
4. Stellen Sie den Test von drei Linsen (Ausschuss oder nicht) in einem Baumdiagramm dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen drei Linsen keine (genau eine, genau zwei, genau drei, höchstens eine, mehr als eine) Ausschuss ist.
   Hinweis: Erinnern Sie sich an die Begriffe „Zufallsvariable" und „Wahrscheinlichkeitsverteilung".

ZV X: Anzahl Linsen, die Ausschuss

Verteilung $X \sim B(\underset{n}{200}; 0{,}025)$

$P(X > 8) = P(X \geq 9)$

$= 0{,}0652 = 6{,}52\,\%$

Schätzungen

Bora : 4 %
Aaron : 4,5 %
Can : 5 %
Bavi : 3,5 %

Simge : 5,5 % ++
Vanessa : 3,7 %
Muhammed : 3 %

WGY13, MLK, 24.08.2020

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= 0{,}9269 + 0{,}0713 = 0{,}9982$

$= P(X < 2)$

$P(X > 1) = P(X=2) + P(X=3)$

$= 0{,}0018 + 0{,}0000$ Rundung

$= 0{,}0018$

$= P(X \geq 2)$

4) Definition Zufallsvariable

ZV X : Anzahl Linsen, die Ausschuss sind

↳ Treffer ≙ Linse, die Ausschuss ist

↳ Mögliche Werte von X : $k = 0, 1, 2, 3$

ZV Y : Anzahl Linsen, die kein Ausschuss sind

↳ Treffer ≙ Linse, die ok ist

↳ Mögliche Werte von Y : $k = 0,1,2,3$

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

k (Anz. Treffer)	$P(X=k)$
0	$0{,}926859 = 1 \cdot 0{,}025^0 \; 0{,}975^3 = \binom{3}{0} \cdot 0{,}025^0 \cdot 0{,}975^3 = P(Y=3)$
1	$0{,}071298 = 3 \cdot 0{,}025^1 \cdot 0{,}0975^2 = \binom{3}{1} \cdot 0{,}025^1 \cdot 0{,}975^2 = P(Y=2)$
2	$0{,}001827 = 3 \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}975^1 = \binom{3}{2} \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}975^1 = P(Y=1)$
3	$0{,}000016 = 1 \cdot 0{,}025^3 \cdot 0{,}0975^0 = \binom{3}{3} \cdot 0{,}025^3 \cdot 0{,}975^0 = P(Y=0)$

Vokabelliste Deutsch – Mathe für Bernoulli-Ketten

W. für ... k Treffer	
mehr als	$P(X > k)$
mindestens	$P(X \geq k)$
genau	$P(X = k)$
höchstens	$P(X \leq k)$
weniger als	$P(X < k)$

$>$ größer als

$\geq$ größer oder gleich

$=$ gleich

$<$ kleiner als

$\leq$ kleiner oder gleich

Merkhilfe:

$|<$ leiner

W6Y13, MLK, 26.08.2020

Binomialverteilung

Für binomialverteilte Zufallsvariablen mit den Parametern n und p und eine Zufallsvariable X mit $X \sim B(n;p)$ gilt

- Erwartungwert $E(X) = \mu = n \cdot p$ $\mu \mathrel{\hat=}$ „mü"
- Varianz $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
- Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ $\sigma \mathrel{\hat=}$ kleines sigma
  ↳ Maß für die mittlere Abweichung vom Erwartungwert

Bsp: 120-mal Würfeln ZV X: Anzahl 6er Verteilung: $X \sim B(\underbrace{120}_{n}; \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{p})$

$$E(X) = \mu = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

$$V(X) = 120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 16\frac{2}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{16\frac{2}{3}} = 4{,}08$$

Kumulierte Binomialverteilung

Mögliche Schreibweise

$$P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k) = F(n;p;k)$$

für $X \sim B(n;p)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es höchstens k Treffer gibt.

Als Formel: $$F(n;p;k) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n}_{i=0} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1}}_{i=1} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}}_{i=2} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{i=k}$$

Bsp: Wie wahrscheinlich sind höchstens 25 6er beim 100-maligen Würfeln?

ZVX: Anzahl 6er $X \sim B(100; \frac{1}{6})$ $$P(X \le 25) = \sum_{i=0}^{25} \binom{100}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-i} = 0{,}9881$$

↳ menu → 5 → 3 nCr(100, i)

Kumulierte W. bei binomialverteilten ZV mit CAS

$X \sim B(n;p)$

↳ menu → 5 → 5 → B Binomial Cdf — Bsp von S. 5

→ Anzahl Versuche n — 100

→ Trefferwahrscheinlichkeit p — $\frac{1}{6}$

→ untere Schranke — 0

→ obere Schranke — 25

→ 0,988123 ✓

Achtung: Die untere und obere Grenze wird eingeschlossen, d.h. z.B. bei 0 und 25 wird $P(X \leq 25)$ berechnet.

Übung S. 459 Alles klar?

1) ZV X festlegen   2) Verteilung $X \sim B(\quad)$

3) Wahrscheinlichkeiten

ZVX : Anzahl richtiger Antworten $X \sim B(50; \frac{1}{4})$ 0,25

c) Schreibweise $P(15 \leq X \leq 20) = 0{,}2456$

a) $P(X=20) = B(50; \frac{1}{4}; 20) = 0{,}0077 = 0{,}77\,\%$

↳ 5 → 5 → A oder 5 → 5 → B → unt. S = obere S. = 20

b) $P(X > 15) = 0{,}1631$