Kumulierte Binomialverteilung

Mögliche Schreibweise

$$P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k) = F(n;p;k)$$

für $X \sim B(n;p)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es höchstens k Treffer gibt.

Als Formel: $F(n;p;k) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

$$= \underbrace{\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n}_{i=0} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1}}_{i=1} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}}_{i=2} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{i=k}$$

Bsp: Wie wahrscheinlich sind höchstens 25 6er beim 100-maligen Würfeln?

ZVX: Anzahl 6er $X \sim B(100; \frac{1}{6})$ $P(X \le 25) = \sum_{i=0}^{25} \binom{100}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-i} = 0{,}9881$

↳ menu → 5 → 3 nCr(100, i)

Kumulierte W. bei binomialverteilten ZV mit CAS

$X \sim B(n;p)$

↳ menü → 5 → 5 → B Binomial Cdf | Bsp von S. 5

→ Anzahl Versuche n	100
→ Trefferwahrscheinlichkeit p	$\frac{1}{6}$
→ untere Schranke	0
→ obere Schranke	25
	→ 0,988123 ✓

Achtung: Die untere und obere Grenze wird eingeschlossen, d.h z.B. bei 0 und 25 wird $P(X \leq 25)$ berechnet.

WGY13, MLK 27.08.2020

Aufgabe 1: (Zentralabitur 2014 GK)

Das Unternehmen *AcdBon GmbH* betreibt auch das Recycling von CDs. Die silberfarbenen Scheiben bestehen zu 99 Prozent aus dem wertvollen Rohstoff Polycarbonat. Ein Arbeitsschritt des Recyclings besteht in der „Entschichtung" der CDs, das heißt, sie werden von der Lack- und Datenträgerschicht befreit.

Die Anlieferung der zu verarbeitenden CDs erfolgt in größeren Containern. Beschädigte Scheiben sind nicht zu verwerten und müssen vor der Entschichtung als unbrauchbar aussortiert werden. Der Anteil der unbrauchbaren CDs beträgt erfahrungsgemäß 5 %. Einem Container wird eine Zufallsstichprobe von 900 Scheiben entnommen und kontrolliert. Es wird davon ausgegangen, dass die Zufallsgröße X: Anzahl der unbrauchbaren CDs binomialverteilt ist.

a) Die Leiterin der Controllingabteilung möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau die erwartete Anzahl der unbrauchbaren CDs auftritt. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
E1: Mindestens 40 entnommene CDs sind unbrauchbar.
E2: Höchstens 35 entnommene CDs sind unbrauchbar.
E3: Mehr als 50 und höchstens 70 CDs sind unbrauchbar.
E4: Mindestens 850 CDs sind brauchbar. 12

c) Bestimmen Sie, z. B durch Probieren, die Anzahl der CDs, die mindestens geprüft werden müssen, um mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens drei unbrauchbare CDs zu erhalten.

a) Erwartungswert $E(X) = \mu = n \cdot p$

$= 900 \cdot 0{,}05 = \underline{45}$

$P(X=45) = 0{,}0609$

$= \binom{900}{45} \cdot 0{,}05^{45} \cdot 0{,}95^{855}$

↳ nCr(900,45)

mit CAS: binomCdf(900, 0.05, 45, 45) menu → 5 → 5 → B

1) Definition der ZV

ZV X: Anzahl unbrauchbarer CDs

2) Verteilung von X:

$X \sim B(\underset{n}{900} ; \underset{p}{0{,}05})$

↳ mögliche Werte von X: X = 0, X = 1, X = 2, ..., X = 898, X = 899, X = 900

↳ $P(X=0) = \dots$
$P(X=1) = \dots$
$P(X=2) = \dots$
$\vdots$
$P(X=899) = \dots$
$P(X=900) = \dots$

Wahrscheinlichkeitsverteilung (Binomialverteilung)

b) $P(E1) = P(X \geq 40) = 0{,}7981$

CAS: binomCdf(900, 0.05, 40, 900)

$P(E2) = P(X \leq 35) = 0{,}0691$

CAS: binomCdf(900, 0.05, 0, 35)

$P(E3) = P(51 \leq X \leq 70) = 0{,}19800$

E4: Mind. 850 CDs brauchbar $\rightarrow$

Brauchbar		Unbrauchbar
850	$\rightarrow$	50
851	$\rightarrow$	49
852	$\rightarrow$	48
	$\vdots$	
899	$\rightarrow$	1
900	$\rightarrow$	0

$X \leq 50$

$P(E4) = P(X \leq 50) = 0{,}8018$

Alternativ: ZV Y: Anz. brauchbarer CDs

$Y \sim B(900; 0{,}95)$

$P(Y \geq 850) = 0{,}8018$

CAS: binomCdf(900, $\underline{\underline{0.95}}$, 850, 900)

Aufgabe 1: (Zentralabitur 2014 GK)

Das Unternehmen *AcdBon GmbH* betreibt auch das Recycling von CDs. Die silberfarbenen Scheiben bestehen zu 99 Prozent aus dem wertvollen Rohstoff Polycarbonat. Ein Arbeitsschritt des Recyclings besteht in der „Entschichtung“ der CDs, das heißt, sie werden von der Lack- und Datenträgerschicht befreit.

Die Anlieferung der zu verarbeitenden CDs erfolgt in größeren Containern. Beschädigte Scheiben sind nicht zu verwerten und müssen vor der Entschichtung als unbrauchbar aussortiert werden. Der Anteil der unbrauchbaren CDs beträgt erfahrungsgemäß 5 %. Einem Container wird eine Zufallsstichprobe von 900 Scheiben entnommen und kontrolliert. Es wird davon ausgegangen, dass die Zufallsgröße X: Anzahl der unbrauchbaren CDs binomialverteilt ist.

a) Die Leiterin der Controllingabteilung möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit genau die erwartete Anzahl der unbrauchbaren CDs auftritt. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
E1: Mindestens 40 entnommene CDs sind unbrauchbar.
E2: Höchstens 35 entnommene CDs sind unbrauchbar.
E3: Mehr als 50 und höchstens 70 CDs sind unbrauchbar.
E4: Mindestens 850 CDs sind brauchbar. 12

c) Bestimmen Sie, z. B durch Probieren, die Anzahl der CDs, die mindestens geprüft werden müssen, um mit mehr als 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens drei unbrauchbare CDs zu erhalten.

Wenn man 105 CD testet, ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 CDs unbrauchbar sind, mehr als 90 %, nämlich 90,08 %. 104 CDs reichen nicht.

c) gesucht: n

ZV X: Anzahl unbrauchbarer CDs

Verteilung $X \sim B(n, 0{,}05)$

$P(X \geq 3) > 0{,}90$

Ausprobieren

n = 700 : binomCdf(700, 0,05, 3, 700)

n	$P(X \geq 3)$
700	1
100	0,8817
120	0,94
105	0,9008 > 0,9
104	0,8972 < 0,9