WGY13, MLK
24.04.20

1.5 Im Folgenden ist von einer Defektwahrscheinlichkeit von 2% auszugehen.

1.5.1 Ermitteln Sie die Anzahl an Glasteilen, die untersucht werden müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens 3 defekte Glasteile darunter befinden.

1.5.2 Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens 5 defekte Glasteile zu finden, müssen ca. 398 Glasteile untersucht werden. Überprüfen Sie folgende Aussage: „Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens doppelt so viele defekte Glasteile zu finden, also mindestens 10, muss die zu entnehmende Stichprobe verdoppelt werden.

ZV X: Anz. besch. Glasteile

$X \sim B(398, 0.02)$: $P(X \geq 5) \approx 0{,}90$

ZV Y: Anz. besch. Glasteile

$Y \sim B(796, 0.02)$: $P(Y \geq 10) = 0{,}9565$

Die Aussage stimmt nicht, da bei einer Verdopplung des Stichprobenumfangs von 398 auf 796 die W. für doppelt so viele defekte Glasteile von 90% sogar auf 95,65% reicht.

Für $P(Y \geq 10) \approx 90\%$ reicht ein Stichprobenumfang von $n = 708$

Durch Ausprobieren $Y \sim B(n, 0.02)$ $n = 707$ $P(Y \geq 10) = 0{,}8994$

$n = 708$ $P(Y \geq 10) = 0.9003 \approx 90\%$

Ich kann im Teil A ohne Hilfsmittel

- ein vollständiges Baumdiagramm anfertigen und mit einfachen Multiplikationen von Brüchen Wahrscheinlichkeiten ausrechnen.
- einfache lineare Gleichungen mit einer Variablen lösen.
- graphische Darstellungen von Binomialverteilungen (einfach und kumuliert) verstehen und Wahrscheinlichkeiten ermitteln durch Ablesen der Säulenhöhen bzw. durch Addition oder Subtraktion von Säulenhöhen.
- die Formel von Bernoulli im Sachzusammenhang erstellen bzw. verstehen und interpretieren.
- einfache Erwartungswerte und Standardabweichungen binomialverteilter Zufallsvariablen bestimmen.

Ich kann im Teil B

- im Sachzusammenhang einer Aufgabe erläutern, warum eine bestimmte Zufallsvariable binomialverteilt ist und die Begriffe Bernoulli-Versuch und Bernoulli-Kette erläutern.
- die Verteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen in mathematisch korrekter Darstellung angeben.
- für binomialverteilte Zufallsvariable Wahrscheinlichkeiten ermitteln (mit binomCdf und binomPdf und mit der Formel von Bernoulli).
- mit den Begriffen Erwartungswert und Standardabweichungen Wahrscheinlichkeiten ermitteln.
- die Sigma-Regeln anwenden.
- Intervalle bestimmen, in der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Treffer liegen.
- ein vollständiges Baumdiagramm anfertigen.
- bedingte Wahrscheinlichkeiten erklären und mit Hilfe des Satz von Bayes oder eines inversen Baumdiagramms berechnen.
- eine Vierfeldertafel ausfüllen und damit Wahrscheinlichkeiten ermitteln.
- den Begriff der stochastischen (Un)abhängigkeit erklären und für zwei Ereignisse überprüfen.
- einen einseitigen Signifikanztest durchführen und eine Entscheidungsregel herleiten.
- Aussagen im Zusammenhang mit Signifikanztests erläutern und beurteilen.
- die Anzahl der mindestens notwendigen Bernoulli-Versuche bestimmen, um eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zu erreichen.
- im Zusammenhang einer binomialverteilten Zufallsvariable mit μ und σ den Stichprobenumfang n ermitteln.
- bei allen Aufgabentypen auch mit Parametern rechnen und diese bestimmen.

Übungen ohne Hilfsmittel - Aufgabe 0

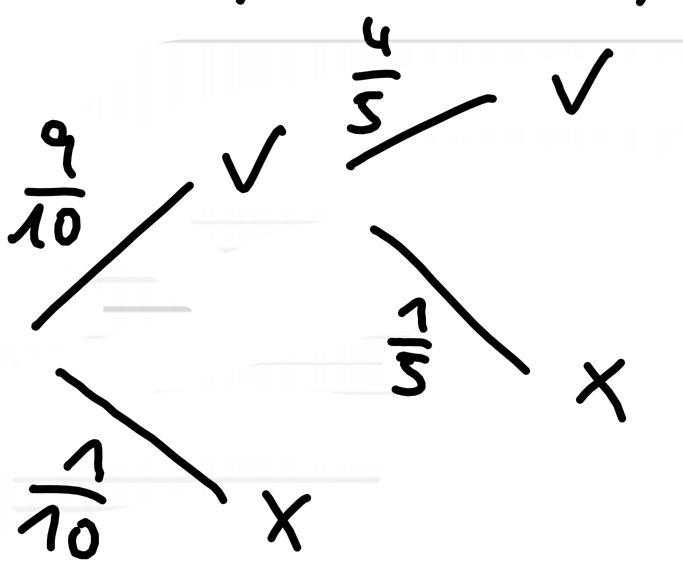
In einem Unternehmen wird ein Produkt in zwei Produktionsstufen hergestellt. Dabei tritt in der 1. Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/10 ein Fehler auf und in der 2. Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/5. Wenn in der 1. Stufe ein Fehler auftritt, so wird das Produkt aussortiert und es entsteht ein Verlust in Höhe von *r* GE. Wenn erst in der 2. Stufe ein Fehler auftritt, so kann das Produkt als 2. Wahl mit einem Gewinn von 5 GE verkauft werden. Ein fehlerfreies Produkt bringt einen Gewinn von 20 GE.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

b) Berechnen Sie, wie hoch der Parameter r höchstens sein darf, damit insgesamt kein Verlust zu erwarten ist.

✓ : fehlerfrei   × : fehlerhaft

a) 1. Stufe   2. Stufe



$P(\checkmark\checkmark) = \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{50}$

$P(\checkmark\times) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{50}$

$P(\times) = \frac{1}{10}$

b) Erwartungswert

ZV X: Gewinn in GE

Verteilung von X

x_i	$x_1 = 20$	$x_2 = 5$	$x_3 = -r$
$P(X=x_i)$	$\frac{36}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{10}$

Lösungsansatz: $E(X) = 0$

$\Leftrightarrow 20 \cdot \frac{36}{50} + 5 \cdot \frac{9}{50} - r \cdot \frac{1}{10} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{720}{50} + \frac{45}{50} - \frac{1}{10} \cdot r = 0 \quad | + \frac{1}{10} r$

$\Leftrightarrow \frac{765}{50} = \frac{1}{10} \cdot r \quad | \cdot 10$

$\Leftrightarrow \frac{7650}{50} = r$

die Defektwahrscheinlichkeit niedriger ist als der angenommene Wert p = 0,15. Wenn in der Stichprobe höchstens 4 ME defekt sind, so wird die niedrigere Fehlerwahrscheinlichkeit als wahr angenommen.

$$\frac{765\cancel{0}}{5\cancel{0}} = \frac{765}{5}$$

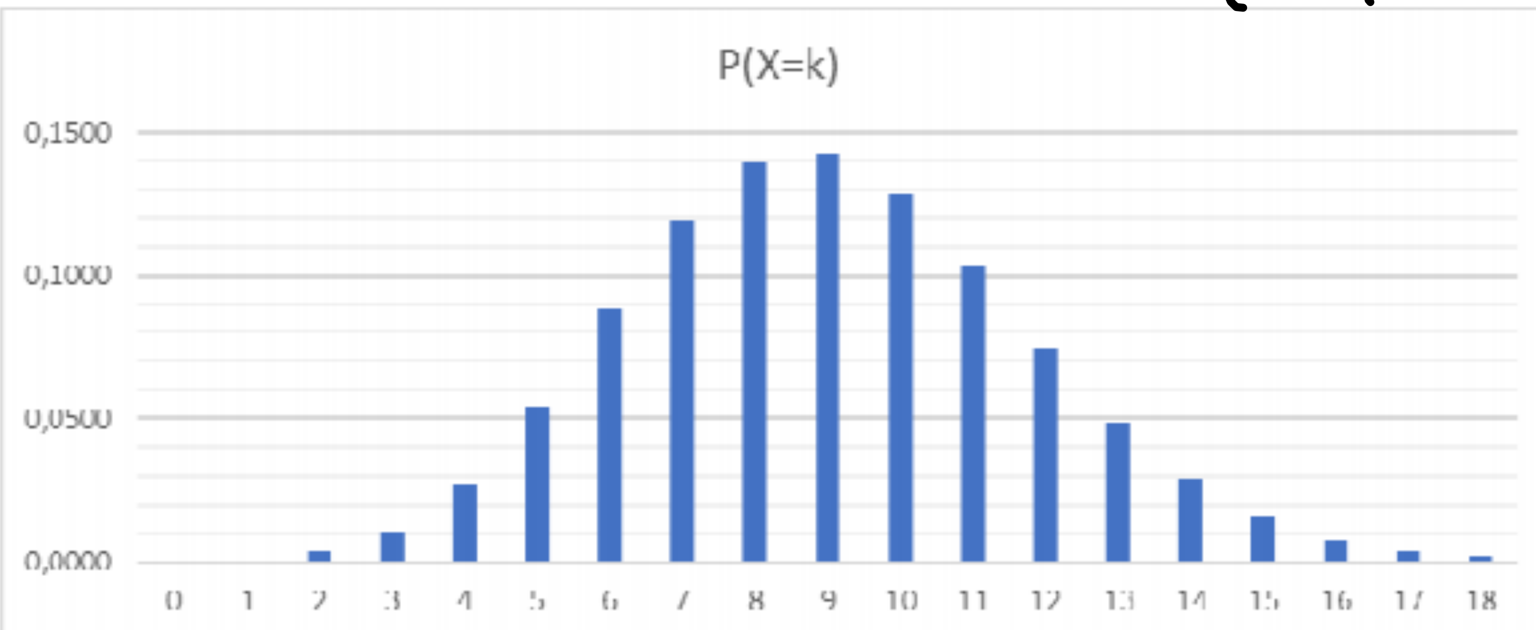
$$
\begin{array}{l}
765 : 5 = 153 \\
\underline{-5} \\
26 \\
\underline{-25} \\
15 \\
\underline{-15} \\
0
\end{array}
$$

$\underline{r = 153}$

Für die nach der 1. Stufe aussortierten Produkte darf der Verlust maximal 153 GE betragen, um insgesamt mindestens alle Kosten zu decken.

Ein anderes Produkt im Unternehmen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% fehlerhaft. Man hat für die binomialverteilte Zufallsgröße X, die die Anzahl der defekten Produkte in einer Stichprobe von 60 Stück angibt, folgendes Histogramm erstellt:

$X \sim B(60, 0.15)$



c) Beurteilen Sie folgende Behauptungen mithilfe des Histogramms:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Produktion von 60 ME genau 4 ME defekt sind, ist halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 8 defekt sind.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 ME defekt ist, ist null. Dieses Ereignis kann also gar nicht eintreten.

C: Durch einen Hypothesentest soll bei einem Signifikanzniveau von 3 % gezeigt werden, dass die Defektwahrscheinlichkeit niedriger ist als der angenommene Wert p = 0,15. Wenn in der Stichprobe höchstens 4 ME defekt sind, so wird die niedrigere Fehlerwahrscheinlichkeit als wahr angenommen.

$H_0: p = 0.15 \qquad H_1: p < 0.15$

$\alpha = 3\% = 0.03$

$P(X \le 4) < 0.03$???

$P(X \le 4) > 0.03$ (Ablesen von $P(X=3)$ und $P(X=4)$)

Aussage ist falsch!
Signifikanzniveau ist höher als 3%.

A: $P(X=4) \approx 0.025$

$P(X=8) \approx 0.14$

Aussage stimmt nicht: 2.5% ist nicht die Hälfte von 14%

B: $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\binom{60}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{0.15^0}_{=1} \cdot \underbrace{(1-0.15)^{60}}_{>0}}_{>0} + \underbrace{\underbrace{\binom{60}{1}}_{=60} \cdot \underbrace{0.15^1}_{=0.15} \cdot \underbrace{0.85^{59}}_{>0}}_{>0}}_{>0}$$

Die W. ist auf jeden Fall größer als 0, allerdings so gering, dass auf dieser Skala keine Säule darstellbar ist.
Die Aussage ist falsch.

Ein anderes Produkt im Unternehmen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% fehlerhaft.

d) Entwerfen Sie eine Aufgabenstellung, die zu folgendem Lösungsansatz führt:

$$P(X = 15) = \binom{260}{15} \cdot 0{,}05^{15} \cdot 0{,}95^{245}$$

Nun werden 200 Produkte untersucht und 14 davon sind fehlerhaft.

e1) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable X und geben Sie die Verteilung an.

e2) Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.

e3) Geben Sie einen ungefähren Wert für $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ an.

Übungen mit CAS

Aufgabe 1

Das Unternehmen Miss Marble liefert empfindliche Glasware innerhalb Deutschlands an den Einzelhandel. Beim Transport kommt es oftmals zu Schäden. Der Transport der Glasware wird von drei Unternehmen durchgeführt: ALKW und Brummie snd auf den Glastransport mit Lastwagen spezialisiert, CRail transportiert die Glasware über das Schienennetz.

1.1 Es sind folgende Durchschnittswerte bekannt: 25% der Glasteile werden von ALKW transportiert, 35% von Brummie und 40% von CRail. Den Unterlagen der Geschäftsführung zufolge gehen 4% der von ALKW transportierten Glasteile zu Bruch, bei Brummier sind es 3% und bei CRail nur 2%.

1.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

1.1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Ein Glasteil wird von Brummie transportiert und geht dabei zu Bruch.
B: Ein Glasteil wird unversehrt transportiert.
C: Ein zerbrochenes Glasteil wurde von CRail transportiert.

1.2 Die Geschäftsführung hat reagiert und eine geänderte Einzelverpackung für die Glasteile in Auftrag gegeben. Dadurch wird erreicht, dass keine Transportschäden mehr auftreten. Allerdings werden die Glasteile beim Verpacken mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% beschädigt. Es werden 1200 Glasteile verpackt und auf Schäden untersucht.

1.2.1 Erläutern Sie, warum hierbei von einer binomialverteilten Zufallsvariable ausgegangen werden kann.

Berechnen Sie die W., dass von 260 getesteten Produkten genau 15 fehlerhaft sind.

e1) ZV X: Anzahl fehlerhafter Produkte

$X \sim B(200, 0.05)$

e2) $\mu = 10 = 200 \cdot 0.05$

$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0.05 \cdot 0.95} = \sqrt{9{,}5}$

$\sqrt{9} < \sigma < \sqrt{16} \Leftrightarrow 3 < \sigma < 4$

$\Rightarrow$ 14 ist größer als $\mu + \sigma$ also liegt es nicht im Intervall!