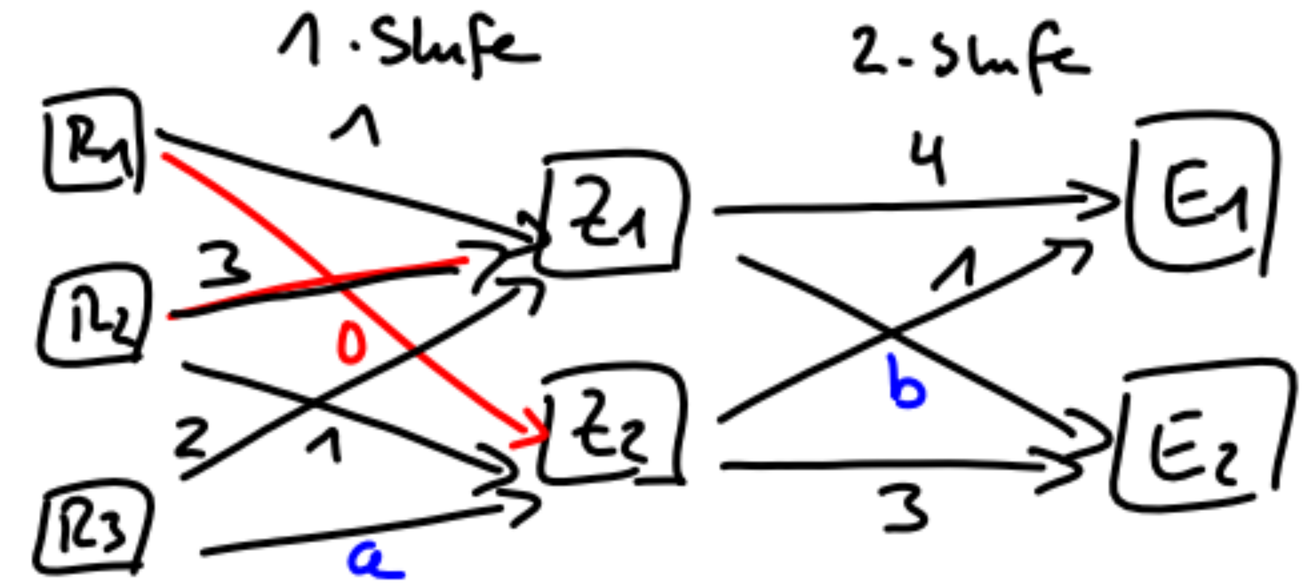
WGY13, MLK, 9.11.2020

Aufgabe 6 (Lineare Algebra)

Die nebenstehende Tabelle gibt die Materialverflechtung in einem zweistufigen Produktionsprozess an, in dem aus Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und anschließend Endprodukte E_1 und E_2 entstehen.

	Z_1	Z_2	E_1	E_2
Z_1			4	b
Z_2			1	3
R_1	1	0	4	2
R_2	3	1	c	9
R_3	2	a	12	16



Verflechtungsdiagramm

6.1 Zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm der ersten und zweiten Stufe.

3 Punkte

6.2 Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b und c.

3 Punkte

Als Matrizen

$$A_{RZ} = \begin{array}{c|cc} & Z_1 & Z_2 \\ R_1 & & \\ R_2 & & \\ R_3 & & \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \quad 3\times 2 \qquad B_{ZE} = \begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ Z_1 & & \\ Z_2 & & \end{array}\begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 2\times 2$$

$$C_{RE} = \begin{array}{c|cc} & E_1 & E_2 \\ R_1 & & \\ R_2 & & \\ R_3 & & \end{array}\begin{pmatrix} 4 & \boxed{2} \\ \boxed{c} & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3\times 2 \qquad 3\times 2 \qquad 2\times 2$$

$$\boxed{c} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = \underline{\underline{13}}$$

2. Zeile × 1. Spalte

$$\boxed{2} = 1 \cdot b + 0 \cdot 3 \iff \underline{\underline{b = 2}}$$

1. Zeile × 2. Spalte

$$16 = 2 \cdot 2 + a \cdot 3 \iff \underline{\underline{4 = a}}$$

3. Zeile × 2. Spalte

8.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

3 Punkte

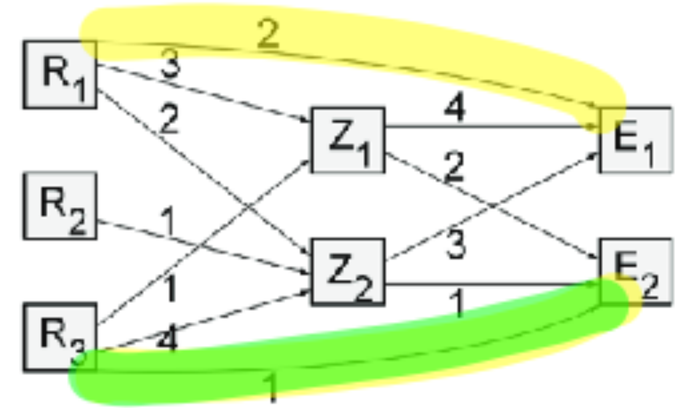
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 28 \end{pmatrix}$$

$4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 = \underline{\underline{25 = b}}$ 1 Zeile × 1. Spalte

$0 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + a \cdot 5 = 28 \Leftrightarrow 18 + 5a = 28 \quad |-18 \Leftrightarrow 5a = 10 \quad |:5$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{a = 2}}$ 2. Zeile × 1. Spalte

Zwischenprodukten für die Endprodukte in dem folgenden Verflechtungsdiagramm verdeutlicht. Die Kosten für je eine Mengeneinheiten der Rohstoffe entsprechen dem Zeilenvektor $(2 \quad 5 \quad 3)$.



Besonderheit

R_1 geht direkt in E_1 mit 2 ME

R_3 " " " E_2 mit 1 ME

8.1 Zeigen Sie, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix gilt: $A_{RE} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$

3 Punkte

8.2 Nehmen Sie Stellung zu der Behauptung, dass die Rohstoffkosten für 10 ME von E_1 über 1000 GE betragen.

$$A_{RE} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\substack{3\times 2 \\ A_{RZ}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{2\times 2 \\ B_{ZE}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{RE}'}$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 3 & 1 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} \checkmark$$

8.2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} E_1 \\ \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} \end{array}$$

GE/ME

$= 103$

Rohstoffkosten für 1 ME von E_1.

Kosten für 10 ME von E_1:

$10 \cdot 103 = 1030$ GE

$\Rightarrow$ Behauptung stimmt

Problem:

Ein Unternehmen stellt bisher aus 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die 3 Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her. Die Stückliste gibt an, wie viele ME der Rohstoffe jeweils für die Herstellung je eines Endproduktes benötigt werden.

Stückliste:

	E_1	E_2	E_3
R_1	1	3	2
R_2	2	2	3
R_3	4	3	1

a) Ein Auftrag über 400 ME von E_1, 250 ME von E_2 und 600 ME von E_3 soll in den nächsten zwei Tagen abgewickelt werden. Ermitteln Sie die notwendigen Mengen der jeweiligen Rohstoffe, die für den Auftrag benötigt werden.

b) Die Produktion von E_1, E_2 und E_3 soll damit auslaufen, dass der Lagerbestand an Rohstoffen möglichst aufgebraucht wird. 560 Stück von R_1, 590 Stück von R_2 und 810 Stück von R_3 sind noch vorrätig. Gibt es eine Produktionsmengenkombination, die dafür sorgt, dass der Lagerbestand **vollständig** aufgebraucht wird?

Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende lineare Gleichung: $4x = 20$

Aufgabe 2: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x+3y=20$$
$$y=4$$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x+3y+10z=99$$
$$6y+2z=48$$
$$12z=36$$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x+3y=20$$
$$-4x+3y=4$$

Aufgabe 5:

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b)

WGY13, MLK
11.11.20

a) $C_{RE}\cdot\vec{m}_E =$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}\cancel{E_1} & \cancel{E_2} & \cancel{E_3}\end{matrix} \\ \begin{matrix}R_1\\R_2\\R_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&3&2\\2&2&3\\4&3&1\end{pmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c|c} & ME \\ \begin{matrix}\cancel{E_1}\\\cancel{E_2}\\\cancel{E_3}\end{matrix} & \begin{pmatrix}400\\250\\600\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c|c} & ME \\ \begin{matrix}R_1\\R_2\\R_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}2350\\3100\\2950\end{pmatrix}\end{array} = \vec{m}_R$$

3×3 $\quad$ 3×1 $\quad$ 3×1

$3=3$ ✓

b) gesucht: Mengenvektor $\vec{m}_E$

$$C_{RE}\cdot\underbrace{\vec{m}_E}_{\text{unbekannt}} = \vec{m}_R$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}E_1 & E_2 & E_3\end{matrix} \\ \begin{matrix}R_1\\R_2\\R_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}1&3&2\\2&2&3\\4&3&1\end{pmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c|c} & ME \\ \begin{matrix}E_1\\E_2\\E_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{array} = \begin{array}{c|c} & ME \\ \begin{matrix}R_1\\R_2\\R_3\end{matrix} & \begin{pmatrix}560\\590\\810\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 1\cdot x + 3\cdot y + 2\cdot z = 560 \\ 2\cdot x + 2\cdot y + 3\cdot z = 590 \\ 4\cdot x + 3\cdot y + 1\cdot z = 810 \end{matrix} \right|$$

← Lineares Gleichungssystem

Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende lineare Gleichung: 4 x = 20

$| :4 \iff \underline{x = 5}$ ✓

Aufgabe 2: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$y = 4$$

2) Einsetzen von $y = 4$: $4x + 3 \cdot 4 = 20 \quad |$

$\iff 4x + 12 = 20 \quad | -12$

$\iff 4x = 8 \quad | :4$

$\iff \underline{x = 2}$ ✓

Einsetzungsverfahren

Lösung $x = 2,\ y = 4$

als Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y + 10z = 99$$
$$6y + 2z = 48$$
$$12z = 36$$

3) $12z = 36 \iff \underline{z = 3}$

$6y + 2 \cdot 3 = 48 \iff \underline{y = 7}$

$4x + 3 \cdot 7 + 10 \cdot 3 = 99 \iff \underline{x = 12}$

Lösungsvektor: $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$-4x + 3y = 4$$

Aufgabe 5:

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b) erkennen.

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4x+3y&=20 \\ -4x+3y&=4 \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b) erkennen.

4) Mit Gleichsetzungsverfahren

beide Gleichungen nach 3y umstellen

$3y = 20 - 4x$

$3y = 4 + 4x$

$\Rightarrow 20 - 4x = 4 + 4x \quad | +4x \quad | -4$

$16 = 8x \quad | :8$

$\underline{2 = x}$ → Einsetzen

$3y = 20 - 4 \cdot 2 \Leftrightarrow y = 4$

Probe $3y = 4 + 4 \cdot 2 \Leftrightarrow y = 4$

Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Mit Additionsverfahren

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 20 \\ -4x + 3y &= 4 \\ \hline 6y &= 24 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \underline{y = 4}$

Einsetzen von $y = 4$

$4x + 3 \cdot 4 = 20 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$

Lösungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gauß-Algorithmus (zum Lösen linearer Gleichungssysteme)

Ziel: Umformen von Gleichungen innerhalb eines Gleichungssystems, so dass eine Gleichung nur eine Variable enthält, eine Gleichung nur zwei Variable, eine Gleichung nur drei Variable, usw.
Dann können die Gleichungen sukzessive (nacheinander) gelöst werden

Erlaubt sind Äquivalenzumformungen
- Gleichungen mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren
- " durch eine " " " dividieren
- Zahlen dürfen addiert/subtrahiert werden
- Vertauschen von Gleichungen
- Addieren/Subtrahieren von Gleichungen

→ unterhalb der Hauptdiagonalen müssen Nullen erzeugt werden

am Beispiel 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\left|\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right| \begin{array}{l} \leftarrow 3 \text{ Variable} \\ \leftarrow 2 \text{ Variable} \\ \leftarrow 1 \text{ Variable} \end{array}$$