Problem:

Ein Unternehmen stellt bisher aus 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die 3 Endprodukte E_1, E_2 und E_3 her. Die Stückliste gibt an, wie viele ME der Rohstoffe jeweils für die Herstellung je eines Endproduktes benötigt werden.

Stückliste:

	E_1	E_2	E_3
R_1	1	3	2
R_2	2	2	3
R_3	4	3	1

a) Ein Auftrag über 400 ME von E_1, 250 ME von E_2 und 600 ME von E_3 soll in den nächsten zwei Tagen abgewickelt werden. Ermitteln Sie die notwendigen Mengen der jeweiligen Rohstoffe, die für den Auftrag benötigt werden.

b) Die Produktion von E_1, E_2 und E_3 soll damit auslaufen, dass der Lagerbestand an Rohstoffen möglichst aufgebraucht wird. 560 Stück von R_1, 590 Stück von R_2 und 810 Stück von R_3 sind noch vorrätig. Gibt es eine Produktionsmengenkombination, die dafür sorgt, dass der Lagerbestand **<u>vollständig</u>** aufgebraucht wird?

Bevor Sie versuchen, das Problem (Aufgabe b) zu lösen, sollten Sie Ihre Kenntnisse der Mittelstufenmathematik etwas auffrischen und folgende Aufgaben lösen.

Aufgabe 1: Lösen Sie folgende lineare Gleichung: $4x = 20$

Aufgabe 2: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$y = 4$$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y + 10z = 99$$
$$6y + 2z = 48$$
$$12z = 36$$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem:

$$4x + 3y = 20$$
$$-4x + 3y = 4$$

Aufgabe 5:

Versuchen Sie nun, eine Strategie zu entwickeln, wie Sie das oben dargestellte Problem lösen können. Es geht zunächst um die Strategie, erst dann um die Lösung! Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Matrizen und Vektoren und schauen Sie, ob Sie den Zusammenhang zwischen Aufgabe a) und b)

WGY13, MLK
11.11.20

a) $C_{RE} \cdot \vec{m}_E =$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 600 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 2350 \\ 3100 \\ 2950 \end{pmatrix} \end{array} = \vec{m}_R$$

3×3 ✓ 3×1 $\quad 3 \times 1$

$3 = 3$

b) gesucht: Mengenvektor $\vec{m}_E$

$$C_{RE} \cdot \underbrace{\vec{m}_E}_{\text{unbekannt}} = \vec{m}_R$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{c} ME \\ \begin{pmatrix} 560 \\ 590 \\ 810 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 1 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 560 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 590 \\ 4 \cdot x + 3 \cdot y + 1 \cdot z = 810 \end{array} \right|$$

← Lineares Gleichungssystem

Gauß-Algorithmus (zum Lösen linearer Gleichungssysteme)

Ziel: Umformen von Gleichungen innerhalb eines Gleichungssystems, so dass eine Gleichung nur eine Variable enthält, eine Gleichung nur zwei Variable, eine Gleichung nur drei Variable, usw.
Dann können die Gleichungen sukzessive (nacheinander) gelöst werden

Erlaubt sind Äquivalenzumformungen
- Gleichungen mit einer Zahl ungleich 0 multiplizieren
- " durch eine " " " dividieren
- Zahlen dürfen addiert / subtrahiert werden
- Vertauschen von Gleichungen
- Addieren / subtrahieren von Gleichungen

→ unterhalb der Hauptdiagonalen müssen Nullen erzeugt werden

am Beispiel 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

$$\left|\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right| \begin{array}{l} \leftarrow 3 \text{ Variable} \\ \leftarrow 2 \text{ Variable} \\ \leftarrow 1 \text{ Variable} \end{array}$$

WGY 13, MLK, 12.11.20

Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{l|rrrcr|l} \mathrm{I} & 1x & +3y & +2z & = & 560 & \mid\cdot(-2) \quad \mid\cdot(-4) \\ \mathrm{II} & 2x & +2y & +3z & = & 590 & \\ \mathrm{III} & 4x & +3y & +1z & = & 810 & \end{array}$$

NR1

$$\begin{array}{rrrrcr} & -2x & -6y & -4z & = & -1120 \\ + & 2x & +2y & +3z & = & 590 \\ \hline \mathrm{IIa} & 0x & -4y & -1z & = & -530 \end{array}$$

NR2

$$\begin{array}{rrrrcr} & -4x & -12y & -8z & = & -2240 \\ + & 4x & +3y & +1z & = & 810 \\ \hline \mathrm{IIIa} & 0x & -9y & -7z & = & -1430 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rrrcr|l} \mathrm{I} & 1x & +3y & +2z & = & 560 & \\ \mathrm{IIa} & 0x & -4y & -1z & = & -530 & \mid\cdot 9 \\ \mathrm{IIIa} & 0x & -9y & -7z & = & -1430 & \mid\cdot(-4) \end{array}$$

NR3

$$\begin{array}{rrrcr} & -36y & -9z & = & -4770 \\ + & 36y & +28z & = & 5720 \\ \hline \mathrm{IIIb} & 0y & +19z & = & 950 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rrrcr|} \mathrm{I} & 1x & +3y & +2z & = & 560 \\ \mathrm{IIa} & 0x & -4y & -1z & = & -530 \\ \mathrm{IIIb} & 0x & +0y & +19z & = & 950 \end{array}$$

→ LGS in Diagonalform → lösbar

IIIb: $19z = 950 \mid :19 \Leftrightarrow z = 50$

↳ in IIa

IIa: $-4y - 1\cdot 50 = -530 \Leftrightarrow y = 120$

↳ in I

I: $1x + 3\cdot 120 + 2\cdot 50 = 560 \Leftrightarrow x = 100$

Antwort: Wenn von E_1 100 ME, von E_2 120 ME und von E_3 50 ME produziert werden, wird der Lagerbestand vollständig aufgebraucht.

Lösungsvektor $\vec{m}_E = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix}$

Probe $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 590 \\ 810 \end{pmatrix}$ ✓

Gauß-Algorithmus für LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen

1) LGS notieren

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{array} \right)$$

2) Mit I und II → IIa berechnen

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{IIIa} \end{array} \left(\begin{array}{ccc} \; & \; & \; \\ 0 & \; & \; \\ 0 & \; & \; \end{array} \right)$$

3) Mit I und III → IIIa berechnen

4) Mit IIa und IIIa → IIIb berechnen

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{IIa} \\ \text{IIIb} \end{array} \left(\begin{array}{ccc} \; & \; & \; \\ 0 & \; & \; \\ 0 & 0 & \; \end{array} \right)$$

5) Nacheinander Variablen ausrechnen (IIIb, IIa, I)

6) Antwort formulieren

Übung Buch S. 520 „Alles klar?"

S. 520 Alles klar?

$$\begin{array}{l|l|l}
\mathrm{I} & 3x + 4y + 5z = 4250 & \cdot(-1) \quad | \cdot 4 \\
\mathrm{II} & 3x + 3y + 2z = 2895 & \\
\mathrm{III} & 4x + 2y + 3z = 3335 & | \cdot (-3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
\mathrm{I} & 3x + 4y + 5z = 4250 & \\
\mathrm{IIa} & -1y - 3z = -1355 & | \cdot 10 \\
\mathrm{IIIa} & 10y + 11z = 6995 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|}
\mathrm{I} & 3x + 4y + 5z = 4250 \\
\mathrm{IIa} & -1y - 3z = -1355 \\
\mathrm{IIIb} & -19z = -6555
\end{array}$$

NR1:
$$\begin{array}{rl}
& -3x - 4y - 5z = -4250 \\
+ & 3x + 3y + 2z = 2895 \\
\hline
\mathrm{IIa} & -1y - 3z = -1355
\end{array}$$

NR2
$$\begin{array}{rl}
& 12x + 16y + 20z = 17000 \\
+ & -12x - 6y - 9z = -10005 \\
\hline
& 10y + 11z = 6995
\end{array}$$

NR3
$$\begin{array}{rl}
& -10y - 30z = -13550 \\
+ & 10y + 11z = 6995 \\
\hline
& -19z = -6555
\end{array}$$

LGS in Diagonalform → lösbar

IIIb $\quad -19z = -6555 \Leftrightarrow z = 345$

IIa $\quad -1y - 3 \cdot 345 = -1355 \Leftrightarrow y = 320$

I $\quad 3x + 4 \cdot 320 + 5 \cdot 345 = 4250 \Leftrightarrow x = 415$

Antwort: Um den Lagerbestand aufzubrauchen, müssen von P1 415 ME, von P2 320 ME und von P3 345 ME produziert werden.

Lösungsvektor $\vec{m_p} = \begin{pmatrix} 415 \\ 320 \\ 345 \end{pmatrix}$ Probe $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 415 \\ 320 \\ 345 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4250 \\ 2895 \\ 3335 \end{pmatrix}$ ✓

Lösen des LGS mit CAS

1) linsolve (bekannt aus WGY12)

2) LGS auf Diagonalform bringen

- menu → 7 → 4 (Diagonalform) ref
- dann in die Klammern von ref nur die Zahlen aus dem LGS als Matrix eingeben (menu → 7 → 1 → 1)
- mit enter wird Diagonalform erzeugt
- dann Variablen nacheinander ausrechnen

aus $ref\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4250 \\ 3 & 3 & 2 & 2895 \\ 4 & 2 & 3 & 3335 \end{pmatrix}$ wird $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3335}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{10} & \frac{1399}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 345 \end{bmatrix}$ →

$$1x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z = \frac{3335}{4}$$

$$1y + \frac{11}{10}z = \frac{1399}{2}$$

$$1z = 345$$

3) LGS auf reduzierte Diagonalform bringen

- menu → 7 → 5 (Reduzierte Diagonalform) rref
- wie oben bei 2 weiter
- Lösung ablesen