18.11.20

Rang und Rangkriterien

S. 547, 1

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ CAS: ref $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_D$

A in Diagonalform

Für Rangbestimmung: Nicht-Nullzeilen zählen (in Diagonalform)

$$\left.\begin{array}{llll} \text{1. Zeile} & 1 & -2 & \rightarrow \text{keine Nullzeile} \\ \text{2. Zeile} & 0 & 1 & \rightarrow \text{" "} \end{array}\right\} = Rg(A) = 2$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ref $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_D$

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{1. Zeile} & 1 & 0 & 7/5 & \rightarrow \text{keine Nullzeile} \\ \text{2. Zeile} & 0 & 1 & -4/5 & \rightarrow \text{" "} \\ \text{3. Zeile} & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \text{Nullzeile!} \end{array}\right\} \Rightarrow Rg(B) = 2$$

c) mit ref :

$$C_D = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(C) = 2$$

d) mit ref

$$D_D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{18}{11} & -1 & -\frac{4}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(D) = 2$$

S. 548 Nr. 5 LGS lösen mit Rang und Diagonalform

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 - 10x_2 \quad\quad &= 15 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= -12 \end{aligned}$$

CAS: ref
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & 0 & 15 \\ 4 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 6/5\, x_3 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \end{pmatrix}$$

A b

Rückübersetzung in Gleichung

Zeile 3: $1x_3 = 5 \Leftrightarrow x_3 = 5$

Zeile 2: $1x_2 + \frac{6}{5} \cdot 5 = -3 \Leftrightarrow x_2 = -9$

Zeile 1: $1x_1 - 2 \cdot (-9) + 0 \cdot 5 = 3 \Leftrightarrow x_1 = -15$

$$\Rightarrow \text{Lösungsvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung $A \cdot x = b$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Aus Diagonalform $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6/5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$Rg(A) = 3 = 3 = Rg(A|b) = m \mathrel{\hat{=}} \text{Zeilenzahl von } A$$

$\Rightarrow$ LGS ist eindeutig lösbar

Probe: $\begin{pmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ ✓

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

5h)
$$\begin{aligned} 0{,}5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 3x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= -16 \\ 6x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 27 \end{aligned}$$

$$\text{ref} \left(\underbrace{\begin{matrix} 0{,}5 & -2 & 3 \\ 3 & 10 & -2 \\ 6 & 9 & 6 \end{matrix}}_{A} \;\; \underbrace{\begin{matrix} 15 \\ -16 \\ 27 \end{matrix}}_{b}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 & 9/2 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} & -\frac{59}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Rg(A) = 2 < 3 = Rg(A|b)$ $\Rightarrow$ LGS ist nicht lösbar, denn

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \quad ↯$$

5f) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 1.5x_3 &= 4.5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= -16 \\ 6x_1 + 1x_2 - 4x_3 &= 34 \end{aligned}$$

$$\text{ref}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1.5 & 4.5 \\ -2 & 3 & 10 & -16 \\ 6 & 1 & -4 & 34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & -2/3 & 17/3 \\ 0 & 1 & 13/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rg(A) = 2 = 2 = Rg(A|b) < 3 \mathrel{\hat{=}} \text{Zeilenzahl von } A$$

$\Rightarrow$ LGS hat unendlich viele Lösungen

Rückwärtseinsetzen

Zeile 3: $0x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = t, \; t \in \mathbb{R}$

Jede reelle Zahl t kann in die Gleichung eingesetzt werden.

Zeile 2: $1x_2 + \frac{13}{5} \cdot t = -\frac{7}{5} \quad | \cdot \frac{13}{5} \cdot t$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{5} - \frac{13}{5}t$

Zeile 1: $1x_1 + \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{7}{5} - \frac{13}{5}t\right) - \frac{2}{3} \cdot t = \frac{17}{3} \Leftrightarrow x_1 = \frac{59}{10} + \frac{11}{10}t = \frac{11t + 59}{10}$

Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{59}{10} + \frac{11}{10} \cdot t \\ -\frac{7}{5} - \frac{13}{5}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ Bsp: $t = 10 \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{169}{10} \\ -\frac{137}{5} \\ 10 \end{pmatrix}$

$A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "A_{RZ}"'] \arrow[rr, bend left] & Z \arrow[r, "B_{ZE}"'] & E \end{tikzcd}$$

A_{RZ} ✓

C_{RE} ✓

B_{ZE} ? $= X$

Erinnerung der Problemstellung:

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte und aus den drei Zwischenprodukten drei Endprodukte hergestellt. Folgende Stücklisten sind bekannt:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	6	8
R2	1	5	7
R3	2	0	3

	E1	E2	E3
R1	46	62	98
R2	38	53	81
R3	21	20	34

Der Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten ist nicht bekannt, soll aber ermittelt werden. Ansatz: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ mit der unbekannten Matrix B_{ZE}, die im Folgenden X genannt wird.

$$A_{RZ} \cdot X = C_{RE} \quad | : A_{RZ}$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \frac{C_{RE}}{A_{RZ}}$$

Problem: Funktioniert nicht, da Matrizendivision nicht definiert ist.

CAS-Befehl: A^{-1}

Frage: Was hilft uns das für das obige Problem?

Erinnerung: Kehrwerte

Bsp: $\frac{3}{5} \to \frac{5}{3}$ $\qquad \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$

Zahl · Kehrwert = 1

Darstellung des Kehrwertes mit $^{-1}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$, $4^{-1} = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{17}\right)^{-1} = 17$

Potenzgesetze $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$x^2 \cdot x^3 = x^5$

$xx \cdot xxx = x^5$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{1+(-1)} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0} = 1$$

Das geht immer (bei Zahlen)

$$a^{1} \cdot \underbrace{a^{-1}}_{\substack{\text{Kehrwert}\\ \text{von } a}} = a^{0} = 1$$

Das geht (so ähnlich) auch für Matrizen

$$A \cdot A^{-1} = E \quad (\hat{=} \text{ Einheitsmatrix})$$