Erinnerung der Problemstellung:

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte und aus den drei Zwischenprodukten drei Endprodukte hergestellt. Folgende Stücklisten sind bekannt:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	6	8
R2	1	5	7
R3	2	0	3

	E1	E2	E3
R1	46	62	98
R2	38	53	81
R3	21	20	34

Der Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten ist nicht bekannt, soll aber ermittelt werden. Ansatz: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ mit der unbekannten Matrix B_{ZE}, die im Folgenden X genannt wird.

1. Idee: $A \cdot X = C$ |:A   funktioniert nicht, da die Division durch Matrizen nicht definiert ist.

2. Idee: Einheitsmatrix E und eine Art „Kehrbruch“ oder „Kehrmatrix“ verwenden wie bei Zahlen, z.B. $5 \cdot 5^{-1} = 5^{1+(-1)} = 5^0 = 1$

Test mit CAS: $$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 = A \cdot A^{-1}$$

und $$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{-9}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{16} & \frac{-5}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

<u>Definition:</u> Eine quadratische Matrix, die beim Multiplizieren mit einer quadratischen Matrix A, die entsprechende Einheitsmatrix E ergibt, nennt man zu A **inverse Matrix** und bezeichnet sie mit $\mathbf{A^{-1}}$.

CAS-Befehl: A^{-1}

Frage: Was hilft uns das für das obige Problem?

Antwort: Multiplizieren Sie die Gleichung $A \cdot X = C$ mit A^{-1} (von links) und schauen Sie, was passiert.

$A \cdot X = C \mid \cdot A^{-1}$ (von links) $\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot C \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot C$

Durch geschicktes Multiplizieren einer Matrix-Gleichung mit einer entsprechenden Inversen, kann man also „nach X auflösen", auch wenn X eine Matrix ist.

Probe: Rechnen Sie mit Hilfe des CAS das Ergebnis von $A^{-1} \cdot C = X = B_{ZE}$ aus und multiplizieren Sie dann, wie gewohnt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ und vergleichen Sie mit der Stückliste.

1. Übung:

	Royal	Deluxe	Young
Leder	2	6	8
Kunstleder	1	5	7
Canvas	2	0	3

	S1	S2	S3
Leder	46	62	98
Kunstleder	38	53	81
Canvas	21	20	34

In der Schülke GmbH werden in einem zweistufigen Produktionsprozess exklusive Handtaschen in Patchwork-Technik gefertigt. In einer ersten Produktionsstufe werden aus den drei Rohstoffen Leder, Kunstleder und Canvas drei verschiedene Stoffteile S1, S2 und S3 hergestellt und aus diesen dann die drei Handtaschen Royal, Deluxe und Young. Die Stücklisten zeigen die ME der benötigten Rohstoffe für eine ME der Handtaschen und die für eine ME der Stoffteile erforderlichen ME an Rohstoffen.

Ermitteln Sie die Matrix, die angibt, wie viele ME der einzelnen Stoffteile für je eine ME der Handtaschen benötigt werden.

Probe: $A_{RZ} \cdot X = C_{RE} \mid \cdot A_{RZ}^{-1}$ v. li.

$\Leftrightarrow X = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE}$

CAS: $X = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 46 & 62 & 98 \\ 38 & 53 & 81 \\ 21 & 20 & 34 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = B_{ZE}$

$\Rightarrow$ Stückliste 2. Stufe

	E_1	E_2	E_3
Z_1	3	1	5
Z_2	0	2	4
Z_3	5	6	8

Probe: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ ✓

2. Übung:

Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach X auf. Achten Sie auf Multiplikation von links oder rechts.

1)	$X \cdot A = B$	7)	$A \cdot X + B \cdot X = C$
2)	$A \cdot X + B = C$	8)	$X \cdot A - X \cdot C = B$
3)	$A \cdot X \cdot B = C$	9)	$2 \cdot X + A \cdot X = B$
4)	$X \cdot B = C$	10)	$A^{-1} \cdot X = B \cdot A$

1. Übung:

C_{RE}

	Royal	Deluxe	Young
Leder	2	6	8
Kunstleder	1	5	7
Canvas	2	0	3

A_{RZ}

	S1	S2	S3
Leder	46	62	98
Kunstleder	38	53	81
Canvas	21	20	34

In der Schülke GmbH werden in einem zweistufigen Produktionsprozess exklusive Handtaschen in Patchwork-Technik gefertigt. In einer ersten Produktionsstufe werden aus den drei Rohstoffen Leder, Kunstleder und Canvas drei verschiedene Stoffteile S1, S2 und S3 hergestellt und aus diesen dann die drei Handtaschen Royal, Deluxe und Young. Die Stücklisten zeigen die ME der benötigten Rohstoffe für eine ME der Handtaschen und die für eine ME der Stoffteile erforderlichen ME an Rohstoffen.

Ermitteln Sie die Matrix, die angibt, wie viele ME der einzelnen Stoffteile für je eine ME der Handtaschen benötigt werden.

2. Übung:

Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach X auf. Achten Sie auf Multiplikation von links oder rechts.

1)	$X \cdot A = B$	7)	$A \cdot X + B \cdot X = C$
2)	$A \cdot X + B = C$	8)	$X \cdot A - X \cdot C = B$
3)	$A \cdot X \cdot B = C$	9)	$2 \cdot X + A \cdot X = B$
4)	$X \cdot B = C$	10)	$A^{-1} \cdot X = B \cdot A$
5)	$A \cdot X \cdot A = B$	11)	$B \cdot A \cdot C \cdot X = X$
6)	$B \cdot A + X = A \cdot X$	12)	$A^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} = C$

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info Homepage: http://www.mathekannjeder.de

Gesucht: $B_{ZE} = X$

$A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE} \Leftrightarrow A_{RZ} \cdot X = C_{RE} \mid \cdot A_{RZ}^{-1}$ v.li

$\Leftrightarrow \underbrace{A_{RZ}^{-1} \cdot A_{RZ}}_{E} \cdot X = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE} \Rightarrow X = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE}$

$$B_{ZE} = A_{RZ}^{-1} \cdot C_{RE} = \begin{pmatrix} \frac{4}{27} & -\frac{11}{27} & \frac{1}{9} \\ -\frac{10}{27} & \frac{1}{54} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{27} & \frac{13}{54} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Diese Matrix kann nicht der Stückliste 2 entsprechen, da negative Einträge enthalten sind (ökonomisch nicht sinnvoll). Vermutlich sind die Zahlen in A_{RZ} oder C_{RE} falsch.

Inverse Matrix berechnen mit Gauß-Algorithmus

$$A \mid E \xrightarrow{\text{Gauß-Alg.}} E \mid A^{-1}$$

Bsp

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 15/16 & -9/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -5/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & 3/4 & 1/4 \end{array}\right)$$

Ohne Beweis: Eine quadratische Matrix A hat eine inverse Matrix A^{-1}, wenn ihr Rang der Zeilenzahl entspricht.

Bei 3×3-Matrizen muss also $Rg(A) = 3$ gelten.

~~Freiwillige~~ Übung: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ inverse A^{-1} mit Gauß-Algorithmus

Kontrolle mit CAS

Tipps zum Lösen von Matrizengleichungen

- $AX + X$ → Ausklammern

$\Leftrightarrow A \cdot X + E \cdot X \Leftrightarrow (A+E) \cdot X$

zum Auflösen nach X
mit $(A+E)^{-1}$ v. links

$$\underbrace{(A+E)^{-1} \cdot (A+E)}_{=E} \cdot X = X$$

- $A \cdot X \cdot A = B \quad | \cdot A^{-1}$ v. li

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X \cdot A = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = A^{-1} \cdot B \quad | \cdot A^{-1} \text{ v. re}$$

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=E} = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$$

- $2 \cdot X + A \cdot X$ → Ausklammern $\quad 2 \cdot E \cdot X + A \cdot X = (2E + A) \cdot X$

Matrixgleichungen

1) $X \cdot A = B \quad | \cdot A^{-1}$ v. rechts $\Leftrightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=E} = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{X = B \cdot A^{-1}}}$

2) $A \cdot X + B = C \quad | -B \Leftrightarrow A \cdot X = C - B \quad | \cdot A^{-1}$ von links

$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Leftrightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C-B)}$

3) $A \cdot X \cdot B = C \quad | \cdot A^{-1}$ von links $\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad | \cdot B^{-1}$ von rechts

$\Leftrightarrow X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{=E} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$

4) $X \cdot B = C \quad | \cdot B^{-1}$ v. rechts $\Leftrightarrow X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{=E} = C \cdot B^{-1} \Leftrightarrow \underline{X = C \cdot B^{-1}}$

5) $A \cdot X \cdot A = B \quad | \cdot A^{-1}$ v. li $| \cdot A^{-1}$ v. re $\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=E} \cdot X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{=E} = A^{-1} \cdot B \, A^{-1}$

$\Leftrightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}}$

6) $B \cdot A + X = A \cdot X \quad | -E \cdot X \Leftrightarrow BA = A \cdot X - E \cdot X \quad |$ Ausklammern X nach rechts

$\Leftrightarrow B \cdot A = (A - E) \cdot X \quad | \cdot (A-E)^{-1}$ v. li $\Leftrightarrow (A-E)^{-1} \cdot B \cdot A = X$

7) $A \cdot X + B \cdot X = C$ | Ausklammern von X nach rechts

$(A+B) \cdot X = C$ | $\cdot (A+B)^{-1}$ von links $\Leftrightarrow X = (A+B)^{-1} \cdot C$

8) $X \cdot A - X \cdot C = B$ | Ausklammern von X nach links

$\Leftrightarrow X \cdot (A-C) = B$ | $\cdot (A-C)^{-1}$ von rechts $\Leftrightarrow X = B \cdot (A-C)^{-1}$

9) $2 \cdot X + A \cdot X = B$ | Ausklammern von X nach rechts

$(2E + A) X = B$ | $\cdot (2E+A)^{-1}$ v. li $\Leftrightarrow \underline{X = (2E+A)^{-1} \cdot B}$

10) $A^{-1} \cdot X = B \cdot A$ | $\cdot A$ v. li $\Leftrightarrow A \cdot A^{-1} X = A \cdot B \cdot A \Leftrightarrow \underline{X = A \cdot B \cdot A}$

11) $B \cdot A \cdot C \cdot X = X$ | $- E \cdot X \Leftrightarrow B \cdot A \cdot C \cdot X - E \cdot X = 0$ | X nach rechts auskl.

$\Leftrightarrow (B \cdot A \cdot C - E) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \underline{X = 0}$

12) $A^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} = C$ | $\cdot A$ v. li | $\cdot B$ v. re $\Leftrightarrow \underline{X = A \cdot C \cdot B}$