Abiturinhalte fokussiert - Stochastik

1.) Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit (Satz von Bayes und Folgerungen daraus)
2.) Binomialverteilung
    a. Bernoulli-Versuch (Eigenschaften, Bernoulli-Formel, Bernoulli-Ketten,Voraussetzungen)
    b. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung (Berechnung in mathematischem oder ökonomischem Zusammenhang: μ = n·p, V(x) = n·p·q und σ = √ V(x))
    c. Summenfunktion der Binomialverteilung (P(X≤k) und ähnliche Fragestellungen)
3.) Ökonomische Anwendungen
    a. Kostenabwägungen, Qualitätsprüfungen. Prüfen von Produktionsprozessen (wie der Name schon sagt: Anwendungen der oben genannten Themen in diesen Zusammenhängen)

Alle Themenbereiche können auch die Verwendung von Parametern enthalten.

Wichtige Kenntnisse:

Formel von Bernoulli

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p gilt für die Wahrscheinlichkeit, genau k Treffer zu erzielen:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \text{ für k = 0,1,2,...n}$$

Die Zufallsgröße oder Zufallsvariable X, die die Anzahl der Treffer angibt, heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung. Kurzschreibweise für die Verteilung von X : X~B(n;p)

CAS-Befehl: binomPdf(n,p,k) mit menu→5→5→A für Wahrscheinlichkeiten der Form P(X = k)

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung (für binomialverteilte Zufallsvariable mit X~B(n;p)

Erwartungswert μ = n· p

Varianz V(X) = $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Standardabweichung σ = $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{V(X)}$

Summierte Binomialverteilung:

$$P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + ... + P(X=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

CAS-Befehl: binomCdf(n,p,k) mit menu→5→5→B für Wahrscheinlichkeiten der Form P(X ≤ k), aber auch für P (X < k), P (X > k), P (X ≥ k) und P (a ≤ X ≤ b)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, für ein Ereignis B, wenn man weiß, dass ein Ereignis A bereits eingetreten ist.

Schreibweise: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ oder analog: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Dabei ist

- P (B|A) die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn vorher A eingetreten ist.
- P (A∩B) die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintreten und
- P(B) die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt.

Satz von Bayes (herzuleiten aus dem inversen Baumdiagramm)

Stochastische Unabhängigkeit (allgemein):

Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt:

P(A∩B) = P(A) · P(B)

Andernfalls heißen die Ereignisse (stochastisch) unabhängig.

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info

Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Zentralabitur 2018 LK mit CAS)

Das Unternehmen Miss Marble liefert empfindliche Glasware innerhalb Deutschlands an den Einzelhandel. Beim Transport kommt es oftmals zu Schäden. Der Transport der Glasware wird von drei Unternehmen durchgeführt: ALKW und Brummie sind auf den Glastransport mit Lastwagen spezialisiert, CRail transportiert die Glasware über das Schienennetz.

1.1 Es sind folgende Durchschnittswerte bekannt: 25% der Glasteile werden von ALKW transportiert, 35% von Brummie und 40% von CRail. Den Unterlagen der Geschäftsführung zufolge gehen 4% der von ALKW transportierten Glasteile zu Bruch, bei Brummier sind es 3% und bei CRail nur 2%.

1.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

1.1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Ein Glasteil wird von Brummie transportiert und geht dabei zu Bruch.
B: Ein Glasteil wird unversehrt transportiert.
C: Ein zerbrochenes Glasteil wurde von CRail transportiert.

1.2 Die Geschäftsführung hat reagiert und eine geänderte Einzelverpackung für die Glasteile in Auftrag gegeben. Dadurch wird erreicht, dass keine Transportschäden mehr auftreten. Allerdings werden die Glasteile beim Verpacken mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% beschädigt. Es werden 1200 Glasteile verpackt und auf Schäden untersucht.

1.2.1 Erläutern Sie, warum hierbei von einer binomialverteilten Zufallsvariable ausgegangen werden kann.

1.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es sind mehr als 25 Glasteile beschädigt.
B: Es sind höchstens 20 Glasteile beschädigt.
C: Es sind genau 24 Glasteile beschädigt.
D: Es sind mindestens 1150 Glasteile unbeschädigt.
E: Es sind mehr als 22 und weniger als 28 Glasteile beschädigt.
F: Die Anzahl der beschädigten Glasteile liegt im Intervall $[\mu - 2\cdot\sigma ; \mu + 2\cdot\sigma]$.

1.2.3 Bestimmen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in den die Anzahl der beschädigten Glasteile mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 75% liegt.

1.5 Im Folgenden ist von einer Defektwahrscheinlichkeit von 2% auszugehen.

1.5.1 Ermitteln Sie die Anzahl an Glasteilen, die untersucht werden müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens 3 defekte Glasteile darunter befinden.

1.5.2 Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens 5 defekte Glasteile zu finden, müssen ca. 398 Glasteile untersucht werden. Überprüfen Sie folgende Aussage: „Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens doppelt so viele defekte Glasteile zu finden, also mindestens 10, muss die zu entnehmende Stichprobe verdoppelt werden.

Aufgabe 2

Ein online Magazin untersucht die Beliebtheit von Streaming-Diensten. Insbesondere geht es um die Dienste „Netflix“ (N) und „Amazon Prime (A). Zur Ermittlung der Beliebtheit sind die Kunden verschiedener Elektronikmärkte befragt worden. Hierbei konnten sie zu den beiden Straming-Diensten jeweils angeben, ob sie diese nutzen oder nicht. 60 % der Kunden nutzen Netflix, 70 % nutzen Amazon Prime, 12 % nutzen keinen der beiden Streaming-Dienste.

2.1 Stellen Sie die Zusammenhänge in einer Vierfeldertafel dar.

2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde nur einen der beiden Streaming-Dienste nutzt.

2.3 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde der Netflix nutzt, Amazon Prime nicht nutzt.

2.4 Überprüfen Sie, ob die Ereignisse N und A stochastisch abhängig sind.

Aufgabe 3 (Zentralabitur LK 2016 mit CAS)

In einem Produktionsbetrieb werden die Feuerwerksraketen in vier Arbeitsschritten produziert. Dabei treten unabhängig voneinander Fehler mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten auf. Die dazugehörigen Zufallsvariablen werden als binomialverteilt angenommen.

	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
Fehlerwahrscheinlichkeit	0,02	0,03	a	0,04

3.1 Die Fehlerwahrscheinlichkeit im Schritt 3 kann bisher lediglich mit einem Parameter a angegeben werden, da genauere Analysen noch ausstehen. In der kommenden Produktionsperiode sollen mindestens 90 % der produzierten Produkte komplett fehlerfrei in den Verkauf gehen. Wie hoch darf die Fehlerwahrscheinlichkeit in Schritt 3 dann höchsten sein?

3.2 Eine Stichprobe der Produkte wird auf Fehler aus Schritt 4 untersucht. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der fehlerhaften Produkte in dieser Stichprobe. Die Standardabweichung beträgt $\sigma \approx 3{,}92$.
Begründen Sie aus dem Sachzusammenhang, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann, und bestimmen Sie den Umfang der entnommenen Stichprobe.

3.3. Es werden 150 Feuerwerksraketen auf fehlerhafte Raketentreibladung (Schritt 4) (p = 0,04) hin untersucht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse.
E1: Höchstens 10 Raketen haben eine defekte Treibladung.
E2: Die Anzahl der defekten Treibladungen weicht um höchstens 2 von dem zu erwartenden Wert ab.
E3: Mindestens 98 % der Treibladungen sind fehlerfrei.

3.4 Bei der Herstellung der Raketen werden Oxidationsmittel benötigt. Diese werden von drei Händlern geliefert. Händler A liefert 30 %, Händler B liefert 40 % und Händler C liefert 30 % der Oxidationsmittel.
Die Qualitätskontrolle beim Eingang der Lieferung ergibt folgendes Ergebnis: Durchschnittlich 5 % der Lieferungen von Händler A und 2 % der Lieferungen von Händler B werden zurückgeschickt. Insgesamt werden durchschnittlich 4 % der Lieferungen zurückgeschickt.

3.5.1 Erstellen Sie zu dieser Situation ein vollständiges Baumdiagramm und geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine zufällig untersuchte Lieferung von Händler C stammt und zurückgeschickt wird.

3.5.2 Bestätigen Sie folgende Aussage eines Mitarbeiters aus der Eingangskontrolle:
„Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zurückgeschickte Lieferung von Händler A stammt, ist kleiner als die Wahrscheinlichkeit, dass eine zurückgeschickte Lieferung von Händler C stammt."

Aufgabe 4 (Zentralabitur GK 2019 mit CAS)

Die CareDisps GmbH bezieht für ihre Displays kratzfeste Gläser, welche vor dem Einbau auf Funktionstüchtigkeit geprüft werden.

4.1 Die benötigten Gläser werden von zwei unterschiedlichen Zulieferern bezogen. Folgende Informationen sind bekannt:

- Die Alfons GmbH liefert 30 % der Gläser und der Rest stammt von der Bauer KG.
- 1/10 aller Gläser sind defekt und stammen von der Bauer KG.
- 5/6 der von der Alfons GmbH gelieferten Gläser sind einwandfrei.

Ereignis D: Ein Glas ist defekt.
Ereignis A: Ein Glas stammt von der Alfons GmbH.

4.1.1 Stellen Sie diesen Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm mit allen Pfad- und Pfadendwahrscheinlichkeiten oder in einer Vierfeldertafel dar.

4.1.2 Zeigen Sie, dass ein Glas mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % defekt ist.

4.1.3 Vergleichen Sie die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(D|A)$ sowie $P(D|\overline{A})$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

4.1.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Glas von der Bauer KG geliefert wurde.

4.2 Ein Glas der Alfons GmbH ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/6 defekt. Aus der nächsten Lieferung der Alfons GmbH wird eine Stichprobe von 250 Gläsern entnommen.

4.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E1: Genau 50 Gläser sind defekt.
E2: Die Lieferung enthält mehr als 43 defekte Gläser.
E3: Die Anzahl defekter Gläser weicht um mehr als zwei Gläser vom Erwartungswert ab.