Analysis „Standardaufgaben“

- Kostenfunktion herleiten (mit LGS)
- Hochpunkt berechnen (z.B. Gewinnmaximum)
- Wendepunkt berechnen (z.B. WP der Kostenfunktion oder von Umsatz- / Absatzfunktionen)
- Tiefpunkt berechnen (z.B. von den Grenzkosten, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion)
- Ökonomische Begriffe erläutern (z.B. Preisuntergrenzen, Gewinnzone, Betriebsoptimum und -minimum)
- Integrale berechnen (in ökonomischen Zusammenhängen z.B. Gesamtabsatz und -umsatz oder Konsumenten- und Produzentenrente)

Aufgabe:
Die Umsatzzahlen pro Woche werden für ein Produkt durch die Funktion

$$f_{a,b}(t) = a\cdot e^{-0{,}2\,\cdot\,(0{,}3\cdot t-b)^2}$$

angegeben. Dabei $f_{a,b}$ (t) den Umsatz in GE pro Woche an. Es gilt $t \geq 0$. Die Parameter a und b hängen von der Konjunktur ab und sind positiv.

a) Berechnen Sie das Umsatzmaximum in Abhängigkeit von den Parametern a und b.
b) Analysieren Sie die Auswirkungen von a und b auf das Umsatzmaximum.
c) Prüfen Sie, ob der Gesamtumsatz in den ersten 20 Wochen für a = 30 und b = 3 den von der Geschäftsleitung geforderten Wert von 400 GE erreicht.

Lösung:
Tipp: Im Scratchpad vorher alle Variablen löschen mit doc → B: Scratchpad löschen

a) Funktion definieren als $f(t) := a\cdot e^{-0{,}2\,\cdot\,(0{,}3\cdot t-b)^2}$ und Ableitungen

$f'(t) := \frac{d}{dt}(f(t))$ $f''(t) := \frac{d}{dt}(f'(t))$

CAS-Befehle: $f1(t) := \frac{d}{dt}(f(t))$ $f2(t) := \frac{d}{dt}(f1(t))$

Notwendige Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3{,}333\cdot b$ or a=0 (a muss positiv sein, kann also ignoriert werden und wird beim zeros-Befehl auch nicht angezeigt)

CAS-Befehl: solve(f1(t)=0,t) oder zeros(f1(t),t)

Hinreichende Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0 \land f''(t) < 0$

Ist erfüllt.

y-Wert: $f(3.3333\cdot b) = a\cdot 1^{b^2} = a$, denn $1^{b^2} = 1$ für alle b.

Das Maximum liegt bei ($3.333\cdot b$ / a).

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info

b) Auswirkungen von a auf den x-Wert des Maximums:
→keine, der x-Wert (der Zeitpunkt des Maximums) ist von a unabhängig.

Auswirkungen von a auf den y-Wert des Maximums:
→ je größer der Wert von a, desto größer wird der maximale Umsatz

Auswirkungen von b auf den x-Wert des Maximums:
→je größer b wird, desto später wird das Umsatzmaximum erreicht

Auswirkungen von b auf den y-Wert des Maximums:
→ keine, der y-Wert nur von a beeinflusst wird.

Zusammenfassung:
→ Der Parameter a hat nur Auswirkungen auf die Höhe des maximalen Umsatzes und keine Auswirkungen auf den Zeitpunkt.
→ Der Parameter b hat nur Auswirkungen auf den Zeitpunkt, an dem der maximale Umsatz erreicht wird und keine Auswirkungen auf die Höhe des maximalen Umsatzes.

c) Parameter a = 30 und b = 3 => $f(t) = 30\cdot e^{-0,2\cdot(0,3\cdot t-3)^2}$ neu definieren im CAS:
Gesamtumsatz der ersten 20 Wochen $\int_0^{20} f(t)\,dt = \int_0^{20} 30\cdot e^{-0,2\cdot(0,3\cdot t-3)^2} = 373,43$
Die geforderten 400 GE werden nicht erreicht.

Aufgabe 1 Stochastik

Ein Kunde der Joro GmbH bestellt 800 Smartphones und überprüft mit einem eigenen Kontrollverfahren das Display. Erfahrungsgemäß werden mit diesem Verfahren bei 3,25% der Smartphones Mängel am Display festgestellt.

a) Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl an Smartphones mit defektem Display.

Lösung: ZV X: Anzahl Smartphones mit Display-Mangel

Verteilung von X: X~B (800;0,0325)

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}0325 = 26$

In der Lieferung werden 26 Smartphones mit mangelhaftem Display erwartet.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl an Smartphones mit defektem Display um höchstens das dreifache der Standardabweichung vom erwarteten Wert abweicht.

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{800 \cdot 0{,}0325 \cdot 0{,}9675} = 5{,}015$

3-fache Standardabweichung: $3 \cdot \sigma = 3 \cdot 5{,}015 = 15{,}045$

Abweichung von μ nach oben: $\mu + 3 \cdot \sigma = 26 + 15{,}045 = 41{,}045 \rightarrow 41$ als obere Grenze

Abweichung von μ nach unten: $\mu - 3 \cdot \sigma = 26 - 15{,}045 = 10{,}955 \rightarrow 11$ als untere Grenze

$P(11 \leq X \leq 41) = 0{,}9977$ CAS: binomCdf(800,0.0325,11,41)

c) Ermitteln Sie die Mindestanzahl der Smartphones, die untersucht werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,8 mindestens ein Smartphone mit defektem Display dabei ist. (Aufgabentyp allgemein am 03.02.21)

Ansatz: $P(X \geq 1) \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}0325^0 \cdot 0{,}9675^n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow$

$1 - 0{,}9675^n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow n \geq 48{,}712$ CAS: solve($1-0{,}9675^n \geq 0.8$,n)

Man muss mindestens 49 Smartphones testen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% mindestens ein Smartphone mit mangelhaftem Display dabei ist.

Aufgabe 2 Stochastik

Der Kunde hat mit der Joro GmbH die folgenden Zahlungsmodalitäten vereinbart: Ist bei höchstens 30 der 800 bestellten Smartphones das Display defekt, so wird die gesamte Bestellung angenommen und der volle Preis gezahlt. Sind mehr als 30 Displays aber weniger als 40 Displays defekt, so wird die Bestellung zwar ebenfalls angenommen, jedoch sind nur noch 75% des Preises zu zahlen. Sind mindestens 40 Displays defekt, so wird die gesamte Lieferung abgelehnt und entsorgt und die Joro GmbH trägt die Kosten in Höhe von 2€ pro Smartphone. Die Produktion eines Smartphones kostet 70 Euro.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

E_1: Die Bestellung wird zum vollen Preis angenommen.

E_2: Die Bestellung wird zum reduzierten Preis angenommen.

E_3: Die Bestellung wird abgelehnt

b) Ermitteln Sie den Preis, den die Joro GmbH pro Smartphone verlangen muss, damit der zu erwartende Gewinn je Smartphone bei 100€ liegt.

[Gehen Sie von folgenden Wahrscheinlichkeiten aus, falls Sie a) nicht lösen konnten: $P(E_1) = 60\%$, $P(E_2) = 15\%$ und $P(E_3) = 25\%$."]

Lösungen

a) ZV X: Anzahl fehlerhafter Smartphones mit X~B(800;0,325)

$P(E_1) = P(X \leq 30) = 0{,}8171$ CAS: binomCdf(800,0.0325,0,30)

$P(E_2) = P(31 \leq X \leq 39) = 0{,}1773$ CAS: binomCdf(800,0.0325,31,39)

$P(E_3) = P(X \geq 40) = 0{,}0056$ CAS: binomCdf(800,0.0325,40,800)

b) ZY Y: Gewinn in € je Smartphone und p Verkaufspreis pro Smartphone

Erwartungswert für nicht binomialverteilte Zufallsvariablen ist die Summe aus den Produkten der Werte der ZV mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y:

y_i	$y_1 = p - 70$	$y_2 = 0{,}75 \cdot p - 70$	$y_3 = -72$
$P(Y = y_i)$	$P(y_1) = 0{,}8171$	$P(y_2) = 0{,}1773$	$P(y_3) = 0{,}0056$

Gewinn = Verkaufspreis – Kosten

$E(Y) = y_1 \cdot P(Y=y_1) + y_2 \cdot P(Y=y_2) + y_3 \cdot P(Y=y_3) =$

$(p-70) \cdot 0{,}8171 + (0{,}75 \cdot p - 70) \cdot 0{,}1773 - 72 \cdot 0{,}0056$

Ansatz: $E(Y) = 100 \Leftrightarrow (p-70) \cdot 0{,}8171 + (0{,}75 \cdot p - 70) \cdot 0{,}1773 - 72 \cdot 0{,}0056 = 100 \Leftrightarrow$

$p = 178{,}95$ (mit solve-Befehl)

Aufgabe 3 Stochastik

Die Joro GmbH erhält von der Müller AG 75% ihrer Fahrradsattel geliefert. Die restlichen Sattel werden von der Krüger KG geliefert. Für die Müller AG erwartet man eine Quote von 5% mangelhafter Sattel, bei der Krüger KG jedoch 12%.

a) Stellen Sie den Sachverhalt als vollständiges Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten und allen Pfadendwahrscheinlichkeiten dar.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass ein zufällig ausgewählter Sattel von der Müller AG geliefert wurde und mangelhaft ist.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Sattel mangelhaft ist.

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein mangelhafter Sattel von der Krüger KG geliefert wurde.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerfreier Sattel von der Müller AG geliefert wurde.

f) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sattel fehlerfrei und von der Krüger KG geliefert wurde.

Aus Baumdiagramm

Aufgabe b) $P(M \cap D) = 0{,}0375$

Aufgabe c) $P(D) = 0{,}0675$

Aufgabe d) bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(K|D) = P(K \cap D)/P(D) = 0{,}03/0{,}0675 = 0{,}4444$

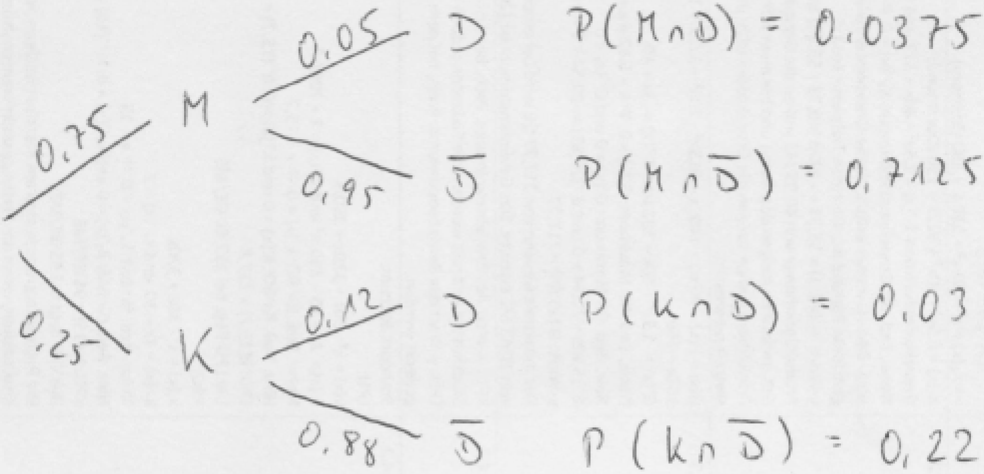
Aufgabe e) bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(M|\bar{D}) = P(M \cap \bar{D})/P(\bar{D}) = 0{,}7125/0{,}9325 = 0{,}7641$

Aufgabe f) $P(K \cap \bar{D}) = 0{,}22$

M : Fahrradsattel von Müller AG

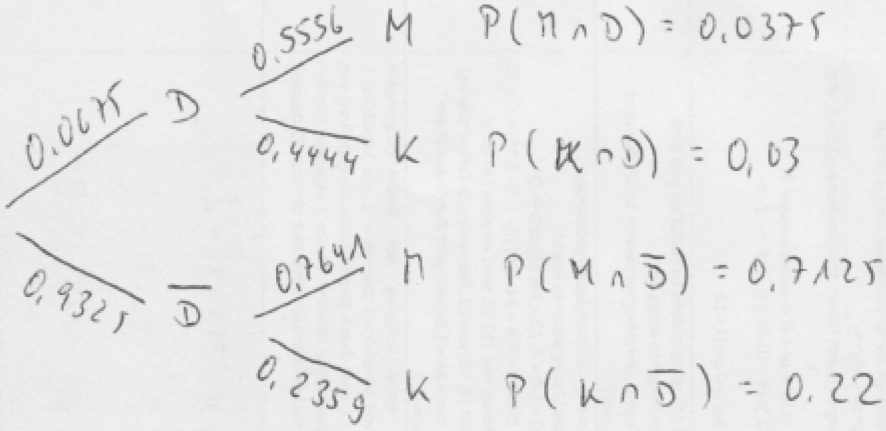
K : " " Krüger KG

D : defekter (mangelhafter Sattel)



$P(D) = P(M \cap D) + P(K \cap D) = 0{,}0675$

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0{,}9325$



Aufgabe 1 – maximaler Gewinn (vom Steckbrief Aufgabe 2)

Die Rasolux GmbH produziert und vermarktet ein großes Sortiment an Gartengeräten und -maschinen. Darunter ist der Aufsitzmäher Goliath. Da Rasolux viele Mitbewerber hat, muss die GmbH als Polypolist ihre Kosten-, Erlös- und Gewinnsituation aufmerksam verfolgen. Gehen Sie im weiteren Verlauf von folgender Gesamtkostenfunktion K mit

$K(x) = 10x^3 - 240x^2 + 1920x + 7.840$, $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 25$ aus. Dabei gibt x die Produktionsmenge in ME und K(x) die Gesamtkosten in GE an. Der Preis des Aufsitzmähers Goliath ist konstant 1.850 GE/ME.

Prüfen Sie die folgenden Behauptungen:

(1) Der größtmögliche Gewinn liegt unter 10 000 GE.

(2) Der maximale Stückgewinn beträgt 770 GE / ME.

Lösung zu (1):
$G(x) = E(x) - (K(x)) = 1850x - (10x^3 - 240x^2 + 1920x + 7.840) = -10x^3 + 240x^2 - 70x - 7840$
Hochpunkt: $G'(x) = -30x^2 + 480x - 70$ und $G''(x) = -60x + 480$
Notw. Bed. für HP: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15{,}85 \vee x = 0{,}15$
Hinr. Bed. für HP: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) < 0$:
$G''(15{,}85) = -471 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = 15{,}85$
$G''(0{,}15) = 471 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = 0{,}15$
y-Wert: $G(18{,}85) = 11525{,}14$

⇨ HP (15,85/11525,14) Der maximale Gewinn ist höher als 10.000 GE.

Alternative: $G(x) \geq 10000$ mit solve-Befehl lösen.

⇨ Bei allen Ausbringungsmengen zwischen 13,15 ME und 18,28 ME wird ein höherer Gewinn als 10.000 GE erzielt => Aussage ist falsch

Lösung zu (2):
Stückgewinnfunktion: $g(x) = G(x) / x = -10x^2 + 240x - 70 - 7840/x$
Ableitungen $g'(x) = -20x + 240 + 7840/x^2$ und $g''(x) = -20 - 7840/x^3$
Notw. Bed. für HP: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 14$
Hinr. Bed. für HP: $g'(x) = 0 \wedge g''(x) < 0$:
$g''(14) = -180/7 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = 14$
y-Wert: $g(14) = 770$

⇨ HP (14/770) Der maximale Stückgewinn ist höher 770 GE bei einer Produktionsmenge von x = 14 ME => Aussage stimmt.