	# Analysis: Extrempunkte	Datum: 11. Januar 2021

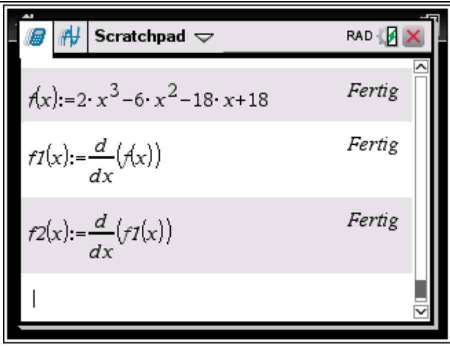
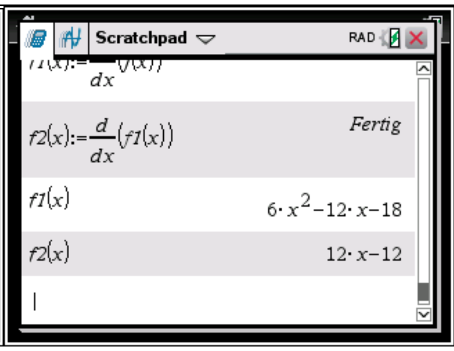
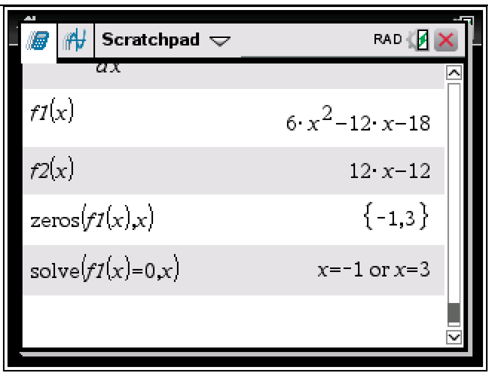
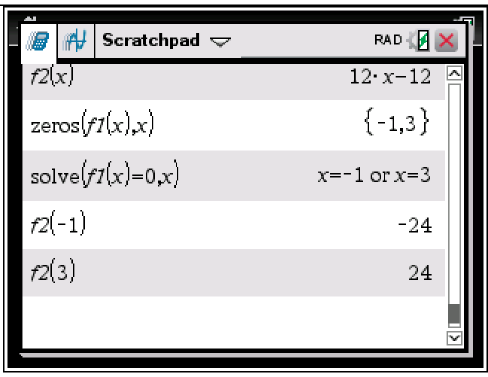
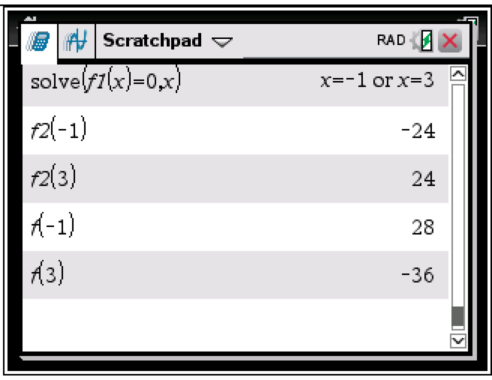
Zusammenfassung für die **<u>Berechnung von Extrempunkten</u>** einer Funktion f(x):

1. Die 1. und 2. Ableitung bestimmen.
2. Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt $f'(x) = 0$ lösen
3. Hinreichende Bedingung überprüfen: Ergebnisse in die 2. Ableitung einsetzen und anhand des Vorzeichens entscheiden, welche Art von Extrempunkt vorliegt.
   a. $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ => TP bei x, da die Steigung größer wird
   b. $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ => HP bei x, da die Steigung kleiner wird
   c. $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ => genauere Untersuchung nötig, entweder Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente) oder trotzdem Extrempunkt z.B. bei Funktionen vom Typ $f(x) = x^n$ mit geradem $n \geq 4$
4. Ergebnis(se) von $f'(x) = 0$ in die Ausgangsfunktion f(x) einsetzen um die y-Koordinate(n) des Extrempunktes zu ermitteln.
5. Alle Punkte mit Bezeichnung und Koordinaten angeben HP (… / …) und/oder TP (… / …)
6. Ggf. bei einer Anwendungsaufgabe Kontext erläutern z.B. beim Gewinnmaximum.

Beispiel auf S. 2 (auch mit CAS-Befehlen)

Übungsaufgaben auf S.3

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Funktion f(x) = $2x^3 - 6x^2 - 18x + 18$ auf Extrempunkte.

Mathematisch	CAS-Befehle
Ableitungen: $f'(x) = 6x^2 - 12x - 18$ $f''(x) = 12x - 12$	 
Notwendige Bedingung für einen Extrempunkt: f'(x) = 0 ⇔ x = -1 v x = 3 (mögliche Extremstellen, da Tangente an diesen Stellen waagerecht)	
Hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt: f'(x) = 0 ∧ f''(x) ≠ 0 f''(-1) = -24 < 0 => HP bei x = -1 f''(3) = 24 > 0 => TP bei x = 3	
y-Werte: f(-1) = 28 f(3) = -36	
Angabe der Punkte HP (-1 / 28) und TP (3 / -36)	

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Funktion auf Extrempunkte. Ableitungen auch ohne Hilfsmittel!

a) $g(x) = x^3 - 8{,}25x^2 + 7{,}5x + 9$ Kontrolle: HP (0,5/10,81) und TP (5/-34,75)

b) $h(x) = \frac{-1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3$ Kontrolle: HP_1 (2/-0,33), HP_2 (-1/2,58) und TP (0/-3)

Aufgabe 3:

Ordnen Sie die Begriffe den passenden Funktionen zu, so dass Sie am Ende 3er-Gruppen haben, z.B. 1 – c – E.

1. Gewinnmaximum
2. Erlösmaximum
3. Betriebsminimum
4. Langfristige Preisuntergrenze
5. Grenzkostenminimum

a. Grenzkostenfunktion
b. Stückkostenfunktion
c. Gewinnfunktion
d. Variable Stückkostenfunktion
e. Erlösfunktion

A. $k_V(x)$
B. G(x)
C. E(x)
D. K'(x)
E. k(x)

Tragen Sie die 5 3er-Gruppen hier ein:

1-c-B	2-e-C	3-d-A	4-b-E	5-a-D

Aufgabe 4:
Ermitteln Sie für ein Unternehmen mit der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 6x^2 + 16x + 16$ das Grenzkostenminimum, das Betriebsminimum und das Betriebsoptimum sowie die kurzfristige und langfristige Preisuntergrenze und erläutern Sie jeweils die ökonomische Bedeutung und mathematische Bedeutung der Begriffe.

Grenzkostenminimum GKM (2/4)

TP von $k_v(x)$ (3/7) => Betriebsminimum bei x = 3 ME und KPU bei y = 7 GE/ME

TP von k(x) (3,61/11,80) => Betriebsminimum bei x = 3,61 ME und LPU bei y = 11,80 GE/ME

Ökonomische Bedeutung:

1.) Der x-Wert des Grenzkostenminimums gibt an, bis zu welcher Produktionsmenge die Grenzkosten sinken (links vom x-Wert) und dementsprechend ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen (rechts vom x-Wert). Dieselbe Information liefert auch der x-Wert vom WP der Kostenfunktion.

2.) Das Betriebsminimum ist die Produktionsmenge bei der die variablen Stückkosten am niedrigsten sind. Den zu dieser Menge gehörenden y-Wert nennt man die kurzfristige Preisuntergrenze. Im konkreten Beispiel könnte man kurzfristig x = 3 ME produzieren und zu einem Preis von 7 GE/ME verkaufen. Damit würde man die variablen Kosten decken und Verluste in Höhe der Fixkosten machen, was für einen kurzen Zeitraum zu akzeptieren ist, daher der Name kurzfristige Preisuntergrenze.

3.) Das Betriebsoptimum ist die Produktionsmenge bei der die Stückkosten am niedrigsten sind. Den zu dieser Menge gehörenden y-Wert nennt man die langfristige Preisuntergrenze. Im konkreten Beispiel könnte man kurzfristig x = 3,61 ME produzieren und zu einem Preis von 11,80 GE/ME verkaufen. Damit würde man die alle Kosten decken, aber auch keine Gewinne erzielen. Langfristig darf also ein Preis von 11,80 GE/ME nicht unterschritten werden, da sonst Verluste erzielt werden.

Beachten Sie, dass sowohl bei Betriebsminimum und der KPU als auch beim Betriebsoptimum und der LPU die beiden Werte immer zusammen betrachten muss.

Mathematische Notation:

Grenzkostenminimum GKM → TP der Grenzkostenfunktion (1. Ableitung von K(x))

Grenzkostenfunktion $GK(x) = K'(x) = 3x^2 - 12x + 16$ → nach oben geöffnete Parabel

Ableitungen: $GK'(x) = 6x - 12$ und $GK''(x) = 6$

Notwendige Bedingung für TP: $GK'(x) = 0$
$GK'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ → hier könnte ein TP liegen, waagerechte Tangente bei x = 2

Hinreichende Bedingung für TP: $GK'(x) = 0 \wedge GK''(x) > 0$
$GK''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ TP bei x = 2

y-Wert: GK(2) = 4

Grenzkostenminimum (2/4)

Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze → TP von $k_v(x)$ (var. Stückkostenfunktion – ohne Fixkosten)

Variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{(K(x) - K_{fix})}{x} = x^2 - 6x + 16$ → nach oben geöffnete Parabel

Ableitungen: $k_V'(x) = 2x - 6$ und $k_v''(x) = 2$

Notwendige Bedingung für TP: $k_v'(x) = 0$
$k_v'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ → hier könnte ein TP liegen, waagerechte Tangente bei x = 3

Hinreichende Bedingung für TP: $k_v'(x) = 0 \wedge k_v''(x) \neq 0$
$k_V''(3) = 2 > 0 \Rightarrow$ TP bei x = 3

y-Wert: $k_v(3) = 7$

TP von $k_v(x)$ (3/7) => Betriebsminimum bei x = 3 ME und KPU bei y = 7 GE/ME

Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze → TP von k (x) (Stückkostenfunktion mit Fixkosten)

Stückkostenfunktion: $k(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 6x + 16 + \frac{16}{x}$ → gebrochen-rationale Funktion (x im Nenner)

Ableitungen: k'(x) = 2x – 6 – 16/x² und k ''(x) = 2 + 32/x³ (andere Darstellung im CAS möglich)

Notwendige Bedingung für TP: k'(x) = 0
k'(x) = 0 ⇔ x = 3,61 → hier könnte ein TP liegen, waagerechte Tangente bei x = 3,61

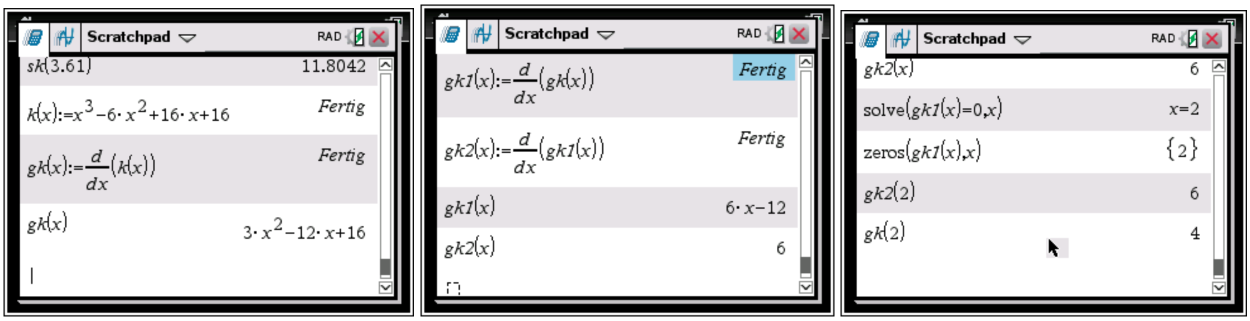
Hinreichende Bedingung für TP: k '(x) = 0 ∧ k ''(x) ≠ 0
k''(3,61) = 2,68 > 0 => TP bei x = 3,61

y-Wert: k(3,61) = 11,80

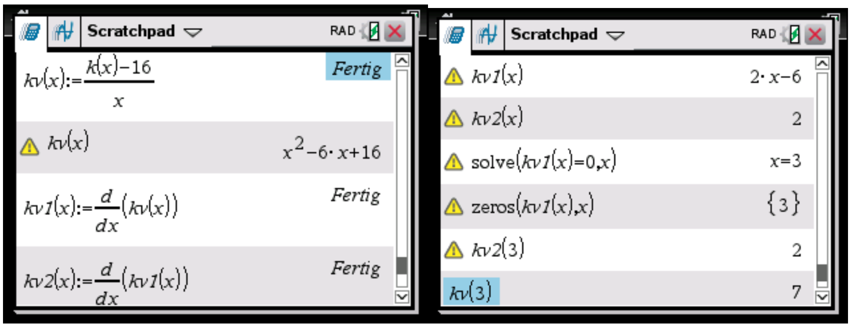
TP von k(x) (3,61/11,80) => Betriebsoptimum bei x = 3,61 ME und LPU bei y = 11,80 GE/ME

CAS-Befehle:

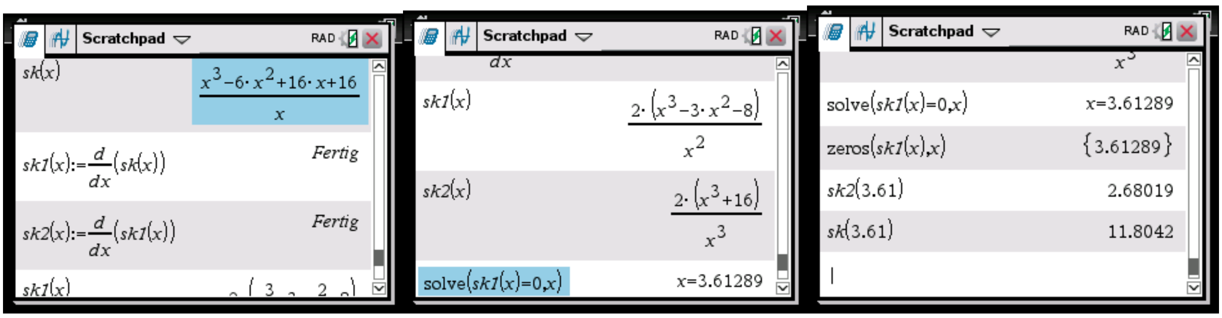
Grenzkostenminimum



Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze



Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze



Graphische Darstellung der variablen Stückkostenfunktion und der Stückkostenfunktion mit Betriebsoptimum und Betriebsminimum sowie KPU und LPU: