	WGY13 - Mathematik **Inverse Matrizen**	Datum:

Erinnerung der Problemstellung:

In einem zweistufigen Produktionsprozess werden aus drei Rohstoffen drei Zwischenprodukte und aus den drei Zwischenprodukten drei Endprodukte hergestellt. Folgende Stücklisten sind bekannt:

	Z1	Z2	Z3
R1	2	6	8
R2	1	5	7
R3	2	0	3

	E1	E2	E3
R1	46	62	98
R2	38	53	81
R3	21	20	34

Der Zusammenhang zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten ist nicht bekannt, soll aber ermittelt werden. Ansatz: $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ mit der unbekannten Matrix B_{ZE}, die im Folgenden X genannt wird.

1. Idee: $A \cdot X = C$ |:A funktioniert nicht, da die Division durch Matrizen nicht definiert ist.

2. Idee: Einheitsmatrix E und eine Art „Kehrbruch“ oder „Kehrmatrix“ verwenden wie bei Zahlen, z.B.
$5 \cdot 5^{-1} = 5^{1+(-1)} = 5^0 = 1$

Test mit CAS: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 = A \cdot A^{-1}$

und $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{-9}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{16} & \frac{-5}{8} & \frac{-3}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^{-1}$

<u>Definition:</u> Eine quadratische Matrix, die beim Multiplizieren mit einer quadratischen Matrix A, die entsprechende Einheitsmatrix E ergibt, nennt man zu A **inverse Matrix** und bezeichnet sie mit $\mathbf{A^{-1}}$.

CAS-Befehl: A^{-1}

Frage: Was hilft uns das für das obige Problem?

Antwort: Multiplizieren Sie die Gleichung $A \cdot X = C$ mit A^{-1} (von links) und schauen Sie, was passiert.

	WGY13 - Mathematik **Inverse Matrizen**	Datum:

$A \cdot X = C \mid \cdot A^{-1}$ (von links) $\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot C \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot C$

Durch geschicktes Multiplizieren einer Matrix-Gleichung mit einer entsprechenden Inversen, kann man also „nach X auflösen", auch wenn X eine Matrix ist.

Probe: Rechnen Sie mit Hilfe des CAS das Ergebnis von $A^{-1} \cdot C = X = B_{ZE}$ aus und multiplizieren Sie dann, wie gewohnt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ und vergleichen Sie mit der Stückliste.

1. Übung:

	Royal	Deluxe	Young
Leder	2	6	8
Kunstleder	1	5	7
Canvas	2	0	3

	S1	S2	S3
Leder	46	62	98
Kunstleder	38	53	81
Canvas	21	20	34

In der Schülke GmbH werden in einem zweistufigen Produktionsprozess exklusive Handtaschen in Patchwork-Technik gefertigt. In einer ersten Produktionsstufe werden aus den drei Rohstoffen Leder, Kunstleder und Canvas drei verschiedene Stoffteile S1, S2 und S3 hergestellt und aus diesen dann die drei Handtaschen Royal, Deluxe und Young. Die Stücklisten zeigen die ME der benötigten Rohstoffe für eine ME der Handtaschen und die für eine ME der Stoffteile erforderlichen ME an Rohstoffen.

Ermitteln Sie die Matrix, die angibt, wie viele ME der einzelnen Stoffteile für je eine ME der Handtaschen benötigt werden.

2. Übung:

Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach X auf. Achten Sie auf Multiplikation von links oder rechts.

1) $X \cdot A = B$

2) $A \cdot X + B = C$

3) $A \cdot X \cdot B = C$

4) $X \cdot B = C$

5) $A \cdot X \cdot A = B$

6) $B \cdot A + X = A \cdot X$

7) $A \cdot X + B \cdot X = C$

8) $X \cdot A - X \cdot C = B$

9) $2 \cdot X + A \cdot X = B$

10) $A^{-1} \cdot X = B \cdot A$

11) $B \cdot A \cdot C \cdot X = X$

12) $A^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} = C$