	WGY13 – Mathematik LK **Checkliste und Übungen für die Klausur am 30.09.2020**	Datum:

Ich kann im Teil A ohne Hilfsmittel

- ein vollständiges Baumdiagramm anfertigen und mit einfachen Multiplikationen von Brüchen Wahrscheinlichkeiten ausrechnen.
- einfache lineare Gleichungen mit einer Variablen lösen.
- graphische Darstellungen von Binomialverteilungen (einfach und kumuliert) verstehen und Wahrscheinlichkeiten ermitteln durch Ablesen der Säulenhöhen bzw. durch Addition oder Subtraktion von Säulenhöhen.
- die Formel von Bernoulli im Sachzusammenhang erstellen bzw. verstehen und interpretieren.
- einfache Erwartungswerte und Standardabweichungen binomialverteilter Zufallsvariablen bestimmen.

Ich kann im Teil B

- im Sachzusammenhang einer Aufgabe erläutern, warum eine bestimmte Zufallsvariable binomialverteilt ist und die Begriffe Bernoulli-Versuch und Bernoulli-Kette erläutern.
- die Verteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen in mathematisch korrekter Darstellung angeben.
- für binomialverteilte Zufallsvariable Wahrscheinlichkeiten ermitteln (mit binomCdf und binomPdf und mit der Formel von Bernoulli).
- mit den Begriffen Erwartungswert und Standardabweichungen Wahrscheinlichkeiten ermitteln.
- die Sigma-Regeln anwenden.
- Intervalle bestimmen, in der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Treffer liegen.
- ein vollständiges Baumdiagramm anfertigen.
- bedingte Wahrscheinlichkeiten erklären und mit Hilfe des Satz von Bayes oder eines inversen Baumdiagramms berechnen.
- eine Vierfeldertafel ausfüllen und damit Wahrscheinlichkeiten ermitteln.
- den Begriff der stochastischen (Un)abhängigkeit erklären und für zwei Ereignisse überprüfen.
- einen einseitigen Signifikanztest durchführen und eine Entscheidungsregel herleiten.
- Aussagen im Zusammenhang mit Signifikanztests erläutern und beurteilen.
- die Anzahl der mindestens notwendigen Bernoulli-Versuche bestimmen, um eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zu erreichen.
- im Zusammenhang einer binomialverteilten Zufallsvariable mit μ und σ den Stichprobenumfang n ermitteln.
- bei allen Aufgabentypen auch mit Parametern rechnen und diese bestimmen.

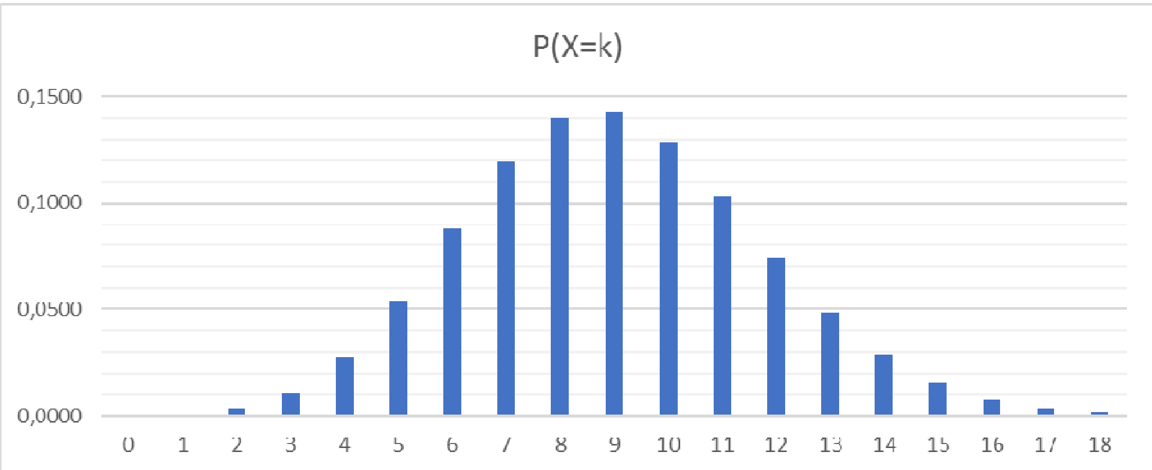
<u>Übungen ohne Hilfsmittel - Aufgabe 0</u>

In einem Unternehmen wird ein Produkt in zwei Produktionsstufen hergestellt. Dabei tritt in der 1. Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/10 ein Fehler auf und in der 2. Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/5. Wenn in der 1. Stufe ein Fehler auftritt, so wird das Produkt aussortiert und es entsteht ein Verlust in Höhe von *r* GE. Wenn erst in der 2. Stufe ein Fehler auftritt, so kann das Produkt als 2. Wahl mit einem Gewinn von 5 GE verkauft werden. Ein fehlerfreies Produkt bringt einen Gewinn von 20 GE.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

b) Berechnen Sie, wie hoch der Parameter r höchstens sein darf, damit insgesamt kein Verlust zu erwarten ist.

Ein anderes Produkt im Unternehmen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% fehlerhaft. Man hat für die binomialverteilte Zufallsgröße X, die die Anzahl der defekten Produkte in einer Stichprobe von 60 Stück angibt, folgendes Histogramm erstellt:



c) Beurteilen Sie folgende Behauptungen mithilfe des Histogramms:

A: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Produktion von 60 ME genau 4 ME defekt sind, ist halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 8 defekt sind.

B: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 ME defekt ist, ist null. Dieses Ereignis kann also gar nicht eintreten.

C: Durch einen Hypothesentest soll bei einem Signifikanzniveau von 3 % gezeigt werden, dass die Defektwahrscheinlichkeit niedriger ist als der angenommene Wert p = 0,15. Wenn in der Stichprobe höchstens 4 ME defekt sind, so wird die niedrigere Fehlerwahrscheinlichkeit als wahr angenommen.

Ein anderes Produkt im Unternehmen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% fehlerhaft.

d) Entwerfen Sie eine Aufgabenstellung, die zu folgendem Lösungsansatz führt:

$$P(X = 15) = \binom{260}{15} \cdot 0{,}05^{15} \cdot 0{,}95^{255}$$

Nun werden 200 Produkte untersucht und 14 davon sind fehlerhaft.

e1) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable X und geben Sie die Verteilung an.
e2) Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.
e3) Geben Sie einen ungefähren Wert für $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ an.

<u>Übungen mit CAS</u>

<u>Aufgabe 1</u>

Das Unternehmen Miss Marble liefert empfindliche Glasware innerhalb Deutschlands an den Einzelhandel. Beim Transport kommt es oftmals zu Schäden. Der Transport der Glasware wird von drei Unternehmen durchgeführt: ALKW und Brummie snd auf den Glastransport mit Lastwagen spezialisiert, CRail transportiert die Glasware über das Schienennetz.

1.1 Es sind folgende Durchschnittswerte bekannt: 25% der Glasteile werden von ALKW transportiert, 35% von Brummie und 40% von CRail. Den Unterlagen der Geschäftsführung zufolge gehen 4% der von ALKW transportierten Glasteile zu Bruch, bei Brummier sind es 3% und bei CRail nur 2%.

1.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem vollständigen Baumdiagramm dar.

1.1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Ein Glasteil wird von Brummie transportiert und geht dabei zu Bruch.
B: Ein Glasteil wird unversehrt transportiert.
C: Ein zerbrochenes Glasteil wurde von CRail transportiert.

1.2 Die Geschäftsführung hat reagiert und eine geänderte Einzelverpackung für die Glasteile in Auftrag gegeben. Dadurch wird erreicht, dass keine Transportschäden mehr auftreten. Allerdings werden die Glasteile beim Verpacken mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% beschädigt. Es werden 1200 Glasteile verpackt und auf Schäden untersucht.

1.2.1 Erläutern Sie, warum hierbei von einer binomialverteilten Zufallsvariable ausgegangen werden kann.

1.2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Es sind mehr als 25 Glasteile beschädigt.
B: Es sind höchstens 20 Glasteile beschädigt.
C: Es sind genau 24 Glasteile beschädigt.
D: Es sind mindestens 1150 Glasteile unbeschädigt.
E: Es sind mehr als 22 und weniger als 28 Glasteile beschädigt.
F: Die Anzahl der beschädigten Glasteile liegt im Intervall $[\mu - 2\cdot \sigma ; \mu + 2\cdot \sigma]$.

1.2.3 Bestimmen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in den die Anzahl der beschädigten Glasteile mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 75% liegt.

1.3 Ein Vertreter der CRail behauptet, dass ein Glasteil mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 2% beim Verpacken zu Bruch geht.

1.3.1 Leiten Sie im Rahmen eines Signifikanztests eine Entscheidungsregel für die CRail auf einem Signifikanzniveau von 10% her, wenn 500 für den Transport verpackte Glaswaren untersucht werden.

1.3.2 Entscheiden Sie begründet, ob folgende Aussage zutrifft: Bei mindestens 15 defekten Glasteilen irrt CRail nur zu maximal 10%, wenn sie behauptet, dass die Defektwahrscheinlichkeit über 2% liegt.

1.4 Im Gegensatz zu CRail will Miss Marble nachweisen, dass die Defektwahrscheinlichkeit unter 3% liegt und testet ebenfalls 500 Glaswaren.

1.4.1 Leiten Sie im Rahmen eines Signifikanztests eine Entscheidungsregel für Miss Marble auf einem Signifikanzniveau von 10% her.

1.4.2 Entscheiden Sie begründet, ob folgende Aussage zutrifft: Bei höchstens 11 defekten Glasteilen ist Miss Marble sich auf 10% Signifikanzniveau sicher, dass die Defektwahrscheinlichkeit unter 3% liegt.

1.5 Im Folgenden ist von einer Defektwahrscheinlichkeit von 2% auszugehen.

1.5.1 Ermitteln Sie die Anzahl an Glasteilen, die untersucht werden müssen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens 3 defekte Glasteile darunter befinden.

1.5.2 Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens 5 defekte Glasteile zu finden, müssen ca. 398 Glasteile untersucht werden. Überprüfen Sie folgende Aussage: „Um mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% mindestens doppelt so viele defekte Glasteile zu finden, also mindestens 10, muss die zu entnehmende Stichprobe verdoppelt werden.

1.6 Jemand behauptet: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von sieben Glasteilen genau zwei beschädigt sind, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, unter 14 Glasteilen vier beschädigte zu finden. Das gilt unabhängig von der Wahrscheinlichkeit p für einen beschädigtes Glasteil.“

Zeigen Sie unter Verwendung der Formel von Bernoulli, dass diese Aussage tatsächlich nur für genau zwei Werte von p erfüllt ist.

1.7 Die Geschäftsleitung diskutiert, ob Lagerkosten eingespart werden könnten, wenn die Glasteile nur auf Anfrage produziert werden. Das könnte bei den Kunden aufgrund der dadurch länger werdenden Lieferzeiten allerdings für Unzufriedenheit sorgen. Aus Erfahrung weiß man, dass 95% der Glasteile in den nächsten vier Wochen verkauft werden.

Ermitteln Sie die Anzahl der Glasteile, die höchstens produziert werden sollten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 59% alle produzierten Glasteile zu verkaufen.

<u>Aufgabe 2</u>

Ein online Magazin untersucht die Beliebtheit von Streaming-Diensten. Insbesondere geht es um die Dienste „Netflix“ (N) und „Amazon Prime (A). Zur Ermittlung der Beliebtheit sind die Kunden verschiedener Elektronikmärkte befragt worden. Hierbei konnten sie zu den beiden Straming-Diensten jeweils angeben, ob sie diese nutzen oder nicht. 60 % der Kunden nutzen Netflix, 70 % nutzen Amazon Prime, 12 % nutzen keinen der beiden Streaming-Dienste.

2.1 Stellen Sie die Zusammenhänge in einer Vierfeldertafel dar.

2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde nur einen der beiden Streaming-Dienste nutzt.

2.3 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde der Netflix nutzt, Amazon Prime nicht nutzt.

2.4 Überprüfen Sie, ob die Ereignisse N und A stochastisch abhängig sind.

Aufgabe 3

In einem Produktionsbetrieb werden die Produkte in vier Arbeitsschritten produziert. Dabei treten unabhängig voneinander Fehler mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten auf. Die dazugehörigen Zufallsvariablen werden als binomialverteilt angenommen.

	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
Fehlerwahrscheinlichkeit	0,02	0,03	a	0,04

3.1 Die Fehlerwahrscheinlichkeit im Schritt 3 kann bisher lediglich mit einem Parameter a angegeben werden, da genauere Analysen noch ausstehen. In der kommenden Produktionsperiode sollen mindestens 90 % der produzierten Produkte komplett fehlerfrei in den Verkauf gehen. Wie hoch darf die Fehlerwahrscheinlichkeit in Schritt 3 dann höchsten sein?

3.2 Eine Stichprobe der Produkte wird auf Fehler aus Schritt 4 untersucht. Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der fehlerhaften Produkte in dieser Stichprobe. Die Standardabweichung beträgt $\sigma \approx 3{,}92$.

Begründen Sie aus dem Sachzusammenhang, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann, und bestimmen Sie den Umfang der entnommenen Stichprobe.

Aufgaben und Beispiele aus dem Buch

Aufgabe 5: Buch Seite 433, Beispiel 6.27 und Beispiel 6.28

Aufgabe 6: Buch Seite 438, Alles klar? → Lösung hinten im Buch

Aufgabe 7: Buch Seite 445, Beispiel 6.32c und Seite 447, Beispiel 6.35

Aufgabe 8: Buch Seite 455, Beispiel 6.39a

Aufgabe 9: Buch Seite 459, Alles klar? → Lösung hinten im Buch

Aufgabe 10: Buch Seite 463, Alles klar? → Lösung hinten im Buch

Aufgabe 11: Buch Seite 478, Beispiel 6.54

Aufgabe 12: Buch Seite 483, Nr. 7 und Nr. 9

Aufgabe 13: Buch Seite 415 Nr. 23