BKCR Berufskolleg Castrop-Rauxel	WGY13 – Mathematik LK **Rangkriterien zur Lösbarkeit linearer Gleichungssystem**	Datum:

Definition: Der **Rang einer Matrix A** (Kurzbezeichnung Rg(A)) ist die Anzahl der von Nullzeilen verschiedenen Zeilen in der Diagonalform von A. Der Rang ist höchstens gleich der Zeilenzahl m einer Matrix, also kann man mathematisch formulieren: **Rg(A) ≤ m**.

Wofür braucht man das? → Mit Hilfe des Rangs einer Matrix kann man entscheiden, ob ein LGS lösbar ist und Aussagen über die Anzahl der Lösungen machen. (Siehe Buch Seite 546)

<u>Übungen: S.545, Alles klar? Nr. 1 und 2</u>

<u>Variante 1:</u> Verwenden Sie den CAS-Befehl „linsolve“

<u>Variante 2:</u> Verwenden Sie den CAS-Befehl „ref“ für die erweiterte Koeffizientenmatrix (A|b) und entscheiden Sie dann anhand der Rangkriterien über die Anzahl der Lösungen (keine, genau eine oder unendlich viele). Geben Sie anschließend die konkrete(n) Lösung(en) an.

<u>Beispiele:</u>

<u>Eindeutig lösbar:</u>

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 0x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \; und \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; und \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

CAS-Befehl: $ref\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **=> Rg(A) = 3 = Rg(A|b) => eindeutig lösbar!**

Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

Zeile 3: $1x_3 = -3 \Leftrightarrow x_3 = -3$ → Einsetzen in Zeile 2

Zeile 2: $1x_2 + 2\cdot(-3) = -1 \Leftrightarrow x_2 = 5$ → Einsetzen in Zeile 1

Zeile 1: $1x_1 + 4\cdot 5 + 2\cdot(-3) = 3 \Leftrightarrow x_1 = -11$

$$Lösungsvektor\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Nicht lösbar:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} und\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} und\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

CAS-Befehl: $ref \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ => **Rg(A) = 2 < 3 = Rg(A|b) => nicht lösbar!**

Denn Zeile 3: $0 \cdot x_3 = 1$ – Für keine Zahl gilt, dass beim Multiplizieren mit 0 das Ergebnis 1 ist.

Mehrdeutig lösbar:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} und\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} und\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

CAS-Befehl: $ref \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ => **Rg(A)=Rg(A|b) = 2 < m => mehrdeutig lösbar!**

Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

Zeile 3: $0x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ → Einsetzen in Zeile 2 –

Anmerkung: Man kann auch s oder andere Namen wählen

Zeile 2: $1x_2 + 1 \cdot t = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2 - t$ → Einsetzen in Zeile 1

Zeile 1: $1x_1 + 4 \cdot (2-t) + 2 \cdot t = 3 \Leftrightarrow x_1 = -5 + 2t$

$Lösungsvektor\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5+2t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix}$ für t = 1 gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, für t = 4 gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$