Lineare Optimierung – Graphische Lösungsmethode

Beispiellösung S.591 Nr. 9

Die Fläche kann nicht negativ sein! Diese Einschränkung gilt bei (fast) allen Optimierungsproblemen.

Entscheidungsvariable:
x: Anzahl ha Weizen; $x \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)
y: Anzahl ha Gemüse; $y \geq 0$ (Nichtnegativitätsbedingung)

Restriktionen (Einschränkungen):

Anbaufläche: $x + y \leq 22$
(Es stehen nur 22ha insgesamt zur Verfügung!)

Arbeitstage: $4 \cdot x + 24 \cdot y \leq 240$
(Maximal 240 Arbeitstage stehen zur Verfügung, und da jeder ha Weizen 4 Tage und jeder ha Gemüse 22 Tage benötigt, muss diese Ungleichung erfüllt sein

Kapitalaufwand: $400 \cdot x + 800 \cdot y \leq 11200$
(Das Kapital ist begrenzt auf 11.200 € und jeder ha Weizen verursacht Kosten in Höhe von 400 € und jeder ha Gemüse verursacht Kosten in Höhe von 800 €. Diese Ungleichung muss also erfüllt werden.

Zielfunktion:
Zielgröße G = Gewinn in €
$G = 500 \cdot x + 1250 \cdot y$ -> maximal

Vorgehen:
1. Restriktionsungleichungen umformen zu linearen Gleichungen der Form $y = mx + b$
2. Berechnen bzw. ablesen der Achsenschnittpunkte der linearen Funktionen (dazu für y und x den Wert 0 einsetzen).
3. Einzeichnen der Restriktionsgeraden
4. Ermitteln des Lösungsraumes durch Angabe der Eckpunkte (Schnittpunkte von Geraden sowie Nullstellen und y-Abschnitte)

Bestimmen der optimalen Lösung:

Verschieben der Zielfunktion durch die Eckpunkte des Lösungsraumes bis optimaler Wert für die Zielgröße (hier: Gewinn in €) erreicht ist.

Hier: $500 \cdot x + 1250 \cdot y = G \;|-500x\;|:1250 \Leftrightarrow y = G/1250 - 0{,}4 \cdot x$

Die optimale Gerade kann am y-Abschnitt abgelesen werden.

Satz: Die optimale Lösung liegt in einem der Eckpunkte des Lösungsraumes. (ohne Beweis)

Alternative:

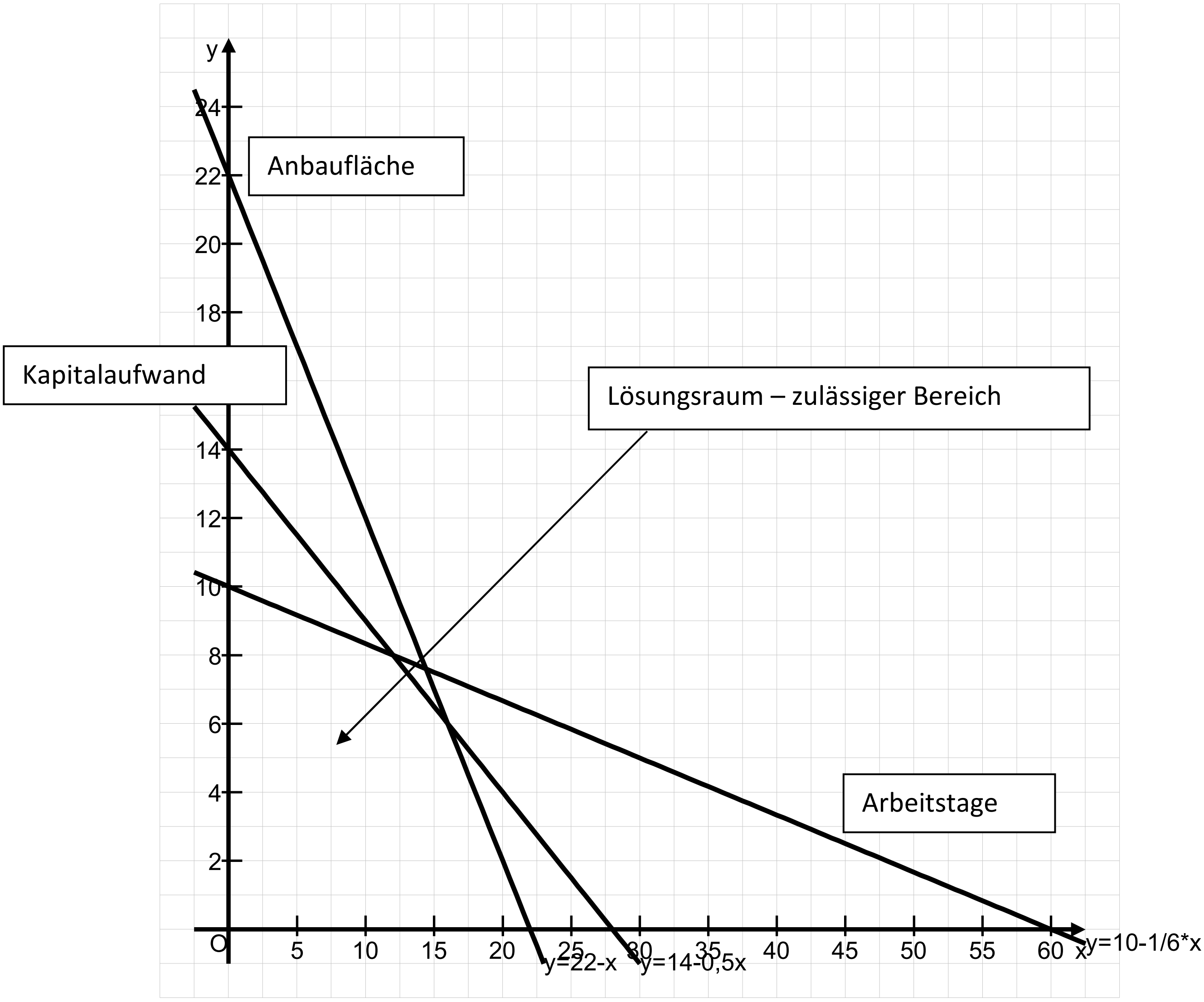
Man setzt die Koordinaten der Eckpunkte des Lösungsraumes in die Zielfunktion ein und vergleicht die Ergebnisse. Der größte Wert liefert die optimale Kombination.

Hier: $x = 12$; $y = 8$ und $G = 16000$

Am konkreten Beispiel:

1. Anbaufläche: $x + y = 22 \;|-x \Leftrightarrow y = 22 - x$
   Nullstelle $y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 22}$ y-Abschnitt $x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y = 22}$
2. Arbeitstage: $4x + 24y = 240 \;|-4x\;|:24 \Leftrightarrow y = 10 - 1/6 \cdot x$
   Nullstelle $y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 60}$ y-Abschnitt $x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y = 10}$
3. Kapitalaufwand: $400x + 800y = 11200 \;|-400x\;|:800 \Leftrightarrow y = 14 - 0{,}5 \cdot x$
   Nullstelle $y = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 28}$ y-Abschnitt $x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{y = 14}$

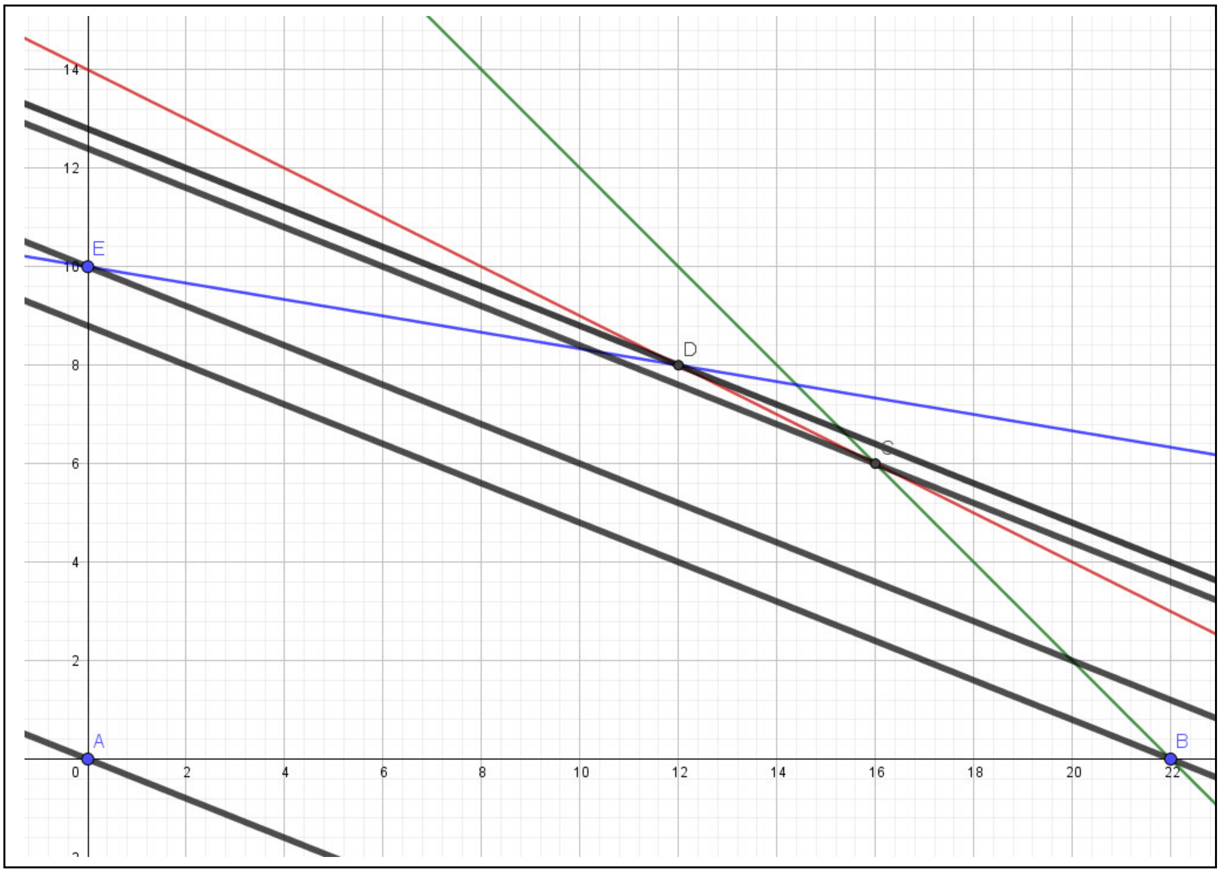
Mit Hilfe der Nullstellen und der y-Abschnitte kann nun die Größe des Koordinatensystems ermittelt werden: Man muss die Nullstellen $x = 22$, $x = 28$ und $x = 60$ und die y-Abschnitte $y = 10$, $y = 14$ und $y = 22$ einzeichnen können => x-Achse von 0 bis 60 (mindestens) und y-Achse von 0 bis 22 (mindestens).



<u>Eckpunkte des Lösungsraumes:</u>
A (0|0), B (0|10) (y-Abschnitt von “Arbeitstage”), C (12|8) (Schnittpunkt von “Arbeitstage” und “Kapitalaufwand”), D (16|6) (Schnittpunkt von “Anbaufläche” und “Kapitalaufwand”) und E (22|0) (Nullstelle von “Anbaufläche”)

Die Schnittpunkte können mit “solve” bestimmt werden, die Nullstellen mit “zeros” oder “solve” und die y-Abschnitte können abgelesen werden an der Geradengleichung (“Zahl ohne x”)

Graphische Lösung:
Zielgerade durch alle 5 Eckpunkte des Lösungsraumes zeichnen und die Gerade mit dem höchsten y-Abschnitt auswählen.
Die Steigung der Zielgeraden ist immer gleich (nämlich in dieser Aufgabe m = -0,4).



Rechnerische Lösung:
Einsetzen der Koordinaten von Punkt

- A (0|0): G = 500·0 + 1250·0 = 0 → Der Gewinn beträgt 0 €.
- B (0|10): G = 500·0 + 1250·10 = 12500 → Der Gewinn beträgt 12.500 €.
- **C (12|8): G = 500·12 + 1250·8 = 16000 → Der Gewinn beträgt 16.000 €.**
- D (16|6): G = 500·16 + 1250·6 = 15500 → Der Gewinn beträgt 15.500 €.
- E (22|0): G = 500·22 + 1250·0 = 11000 → Der Gewinn beträgt 11.000 €.

Die optimale Lösung lautet x = 12 und y = 8. Es sollten also 12 ha Weizen und 8 ha Gemüse angebaut werden. Der Gewinn beträgt dann 16.000 €. Die Restriktionen “Kapitalaufwand” und “Arbeitstage” werden voll ausgenutzt, die Restriktion Anbaufläche nicht, da noch 2 ha übrig bleiben, die nicht genutzt werden.