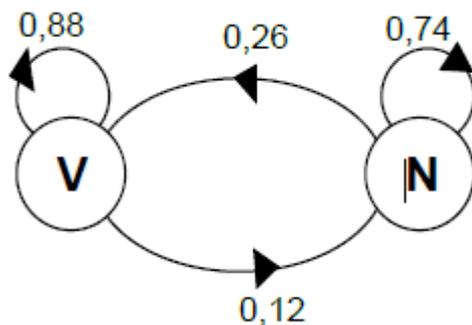




Aufgabe 1

In der Schulmensa gibt es zwei Essensangebote. Es gibt ein vegetarisches Gericht (V) und ein nichtvegetarisches Gericht (N). Es kommt vor, dass die Schülerinnen und Schüler von Tag zu Tag zwischen den Angeboten wechseln. Das Übergangendiagramm stellt diesen Wechsel dar.



Am Montag wählen 100 Schüler das vegetarische und 200 Schüler das nichtvegetarische Gericht.

- Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Essen für Dienstag, Mittwoch, Donnerstag und Freitag. Berechnen Sie dabei die Anzahl der Essen für Dienstag „von Hand“.
- Prüfen Sie, ob es einen Fixvektor v^* gibt. Ein anderer Begriff, der auch häufig verwendet wird, ist „Grenzverteilung“. Für die Grenzverteilung oder den Fixvektor gilt $S \cdot v^* = v^*$.
- Manchmal existiert eine Grenzmatrix G für die stochastische Matrix S und es gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n = G$. Überprüfen Sie, ob eine solche Grenzmatrix existiert, indem Sie verschiedene „hohe“ Potenzen für S berechnen und die Ergebnisse vergleichen.



Lineare Algebra – Stochastische Matrizen
Präsenzunterricht

Datum:
3.3/4.3.21

Aufgabe 2

Ein E-Scooter-Unternehmen hat die Verteilung der Roller zu Beginn und am Ende eines Tages an drei Hotspots untersucht und folgenden Werte erhalten:

	Von A (Hbf)	Von B (Stadtpark)	Von C (Marktplatz)
nach A (Hbf)	20%	20%	30%
nach B (Stadtpark)	40%	40%	10%
nach C (Marktplatz)	40%	40%	60%

Eine Startverteilung am Morgen des 1. März sieht so aus: A: 200 E-Scooter, B: 200 E-Scooter, C: 200 E-Scooter.

- Berechnen Sie die Verteilung der E-Scooter nach 1 Tag, nach 10 Tagen, nach 20 Tagen, nach 40 Tagen und nach 50 Tagen.
- Prüfen Sie, ob eine Grenzverteilung und eine Grenzmatrix existieren und geben Sie diese, falls ja, an.

Aufgabe 3

Laut einer Untersuchung des Deutschen Instituts für Touristik blieben im vergangenen Jahr 25 % der Bevölkerung im Urlaub zu Hause (H), 42 % verreisten innerhalb von Deutschland (D) und 33 % verbrachten Ihren Urlaub im Ausland (A). Die untenstehende Tabelle beschreibt das Wechselverhalten der deutschen Urlauber von Jahr zu Jahr.

	Von H	Von D	Von A
nach H	0,3	0,3	0,1
nach D	0,2	0,6	0,5
nach A	0,5	0,1	0,4

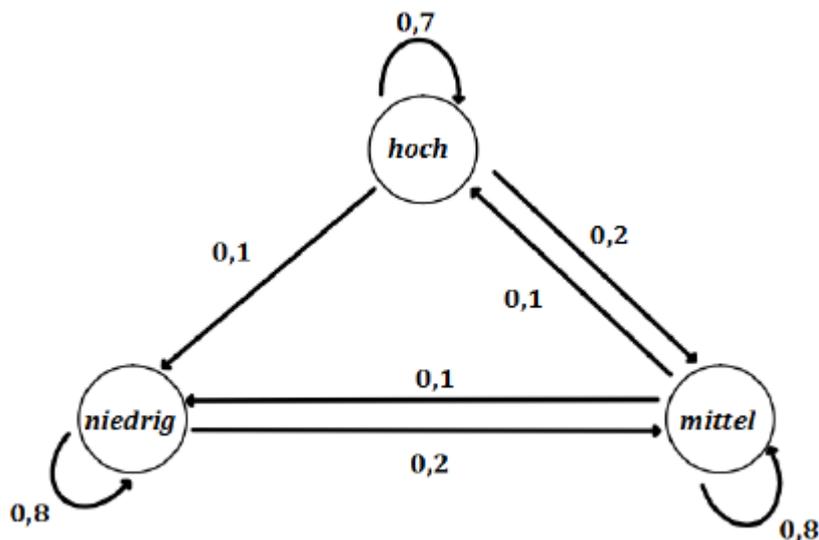
- Erläutern Sie die Bedeutung der Einträge 0,6 und 0,4 im Sachkontext.
- Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Urlauber, die zu Hause bleiben, den Urlaub in Deutschland und im Ausland verbringen für das aktuelle Jahr.
- Bestimmen Sie die Anzahlen für weitere zwei Jahre.
- Berechnen Sie die Übergangsmatrix S^2 . Vergleichen Sie diese mit S .
- Bestimmen Sie S^5 , S^{10} , S^{15} , S^{20} und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

- f) Bestimmen Sie $S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix}$ und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

Aufgabe 4

In einem kleinen Land gibt es ca. 1.000.000 Erwerbstätige, die vom Finanzamt jährlich einer der drei Einkommensgruppen 'niedrig', 'mittel' und 'hoch' zugeordnet werden.

Es hat sich im Laufe der Jahre gezeigt, dass es zwischen diesen Gruppen von Jahr zu Jahr Verschiebungen gibt. Das untenstehende Übergangendiagramm beschreibt diese Verschiebungen von Jahr zu Jahr.



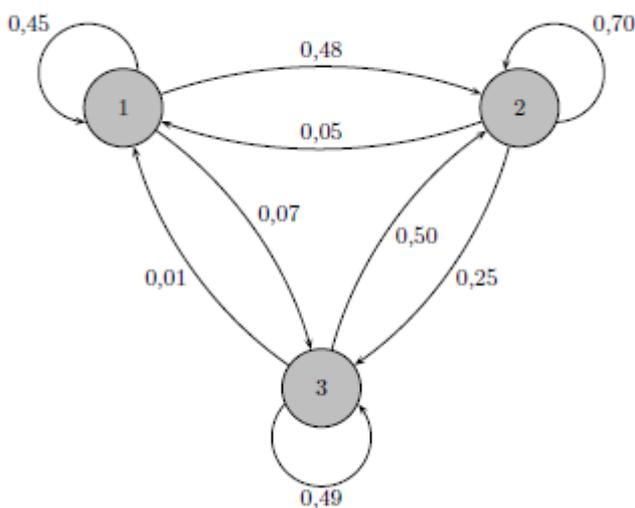
Am Anfang befinden sich 200.000 Erwerbstätige in der Gruppe *niedrig*, 700.000 Erwerbstätige in der Gruppe *mittel* und 100.000 Erwerbstätige in Gruppe *hoch*.

- Bestimmen Sie die Übergangsmatrix S und begründen Sie, warum S eine stochastische Matrix ist.
- Berechnen Sie die Anzahl der Erwerbstätigen, die sich im nächsten Jahr in den Einkommensgruppen befinden.
- Bestimmen Sie die Gruppenstärken für weitere zwei Jahre.
- Berechnen Sie die Übergangsmatrix S^2 . Vergleichen Sie diese mit S .
- Bestimmen Sie S^5 , S^{10} , S^{15} , S^{20} und beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.
- Ermitteln Sie, falls sie existieren, eine Grenzverteilung und eine Grenzmatrix.

- Bestimmen Sie $S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200000 \\ 700000 \\ 100000 \end{pmatrix}$ und erläutern Sie die Bedeutung im Sachkontext.

Aufgabe 5

In einer soziologischen Studie wurde untersucht, in welchem Ausmaß der soziale Status des Vaters den des Sohnes in England und Wales beeinflusst. Im Diagramm sind die Übergänge enthalten.



- Stellen Sie die Übergangsmatrix S auf und beachten Sie, dass die Spaltenüberschriften der Schicht des Vaters und die Zeilenüberschriften der Schicht des Sohnes entsprechen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit in zwei Generationen von 3 nach 1 aufzusteigen, bzw. von 1 nach 3 abzustiegen.
- Wie lautet die stationäre Verteilung (oder Grenzverteilung oder Fixvektor)?
- Untersuchen Sie, ob sich jede Anfangsverteilung der Grenzverteilung nähert.

- Eine Anfangsverteilung ist durch $v_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 300 \\ 2000 \end{pmatrix}$ gegeben. Ermitteln Sie die zu dieser

Anfangsverteilung gehörende Grenzverteilung.