

WHB12d, 9.9.20

## Kapitel 5.2 Rentenrechnung

Voraussetzungen Buch S. 345 (1-5) gelten im ganzen Kapitel.

Rente: regelmäßig wiederkehrende Zahlung in gleicher Höhe

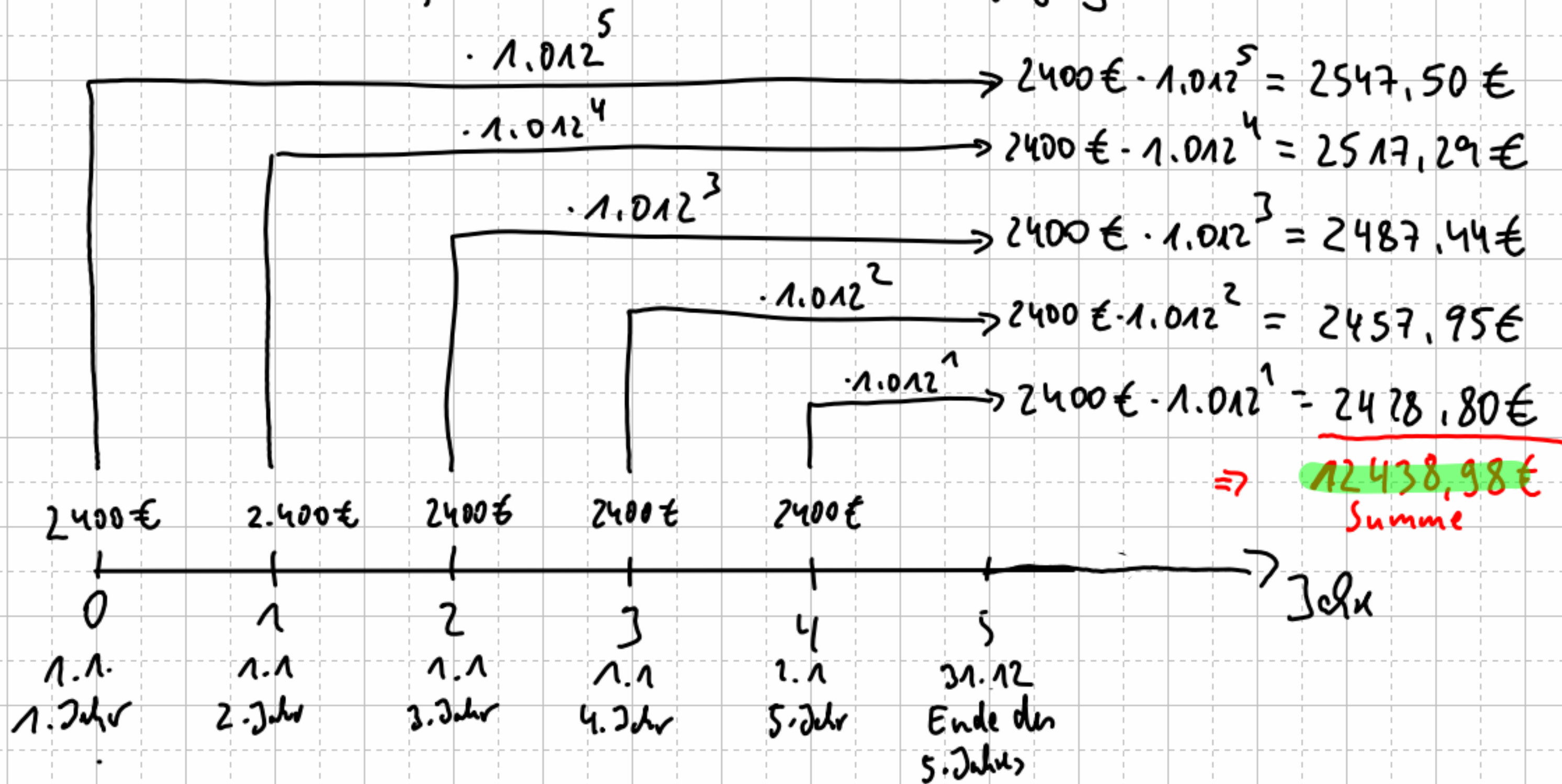
↳ bei Zahlung zu Beginn eines Jahres: vorschüssige Rente

↳ bei Zahlung am Ende eines Jahres: nachschüssige Rente

1. Hinweis: Die Formeln gelten sowohl für Zahlungen, die man erhält als auch für Zahlungen, die man selbst macht.

2. Hinweis: Die Formeln können auch für monatliche Zahlungen verwendet werden, normalerweise geht man aber von Zahlungen pro Jahr aus.

Bsp.: Safet spart jährlich (am Jahresbeginn) 2400 €. Die Bank bietet 1,2% p.a. Nach 5 Jahren möchte Safet von dem Ersparten ein Auto kaufen. **Wie viel € stehen zur Verfügung?**



Beweis der Rentenendwertformel (vorschlüssig)

Wie hoch ist der Rentenendwert  $R_{vn}$  für eine vorschlüssige Rente  $r$ , die  $n$  Jahre für  $p\%$  p.a. <sup>Zinsen</sup> gezahlt wird?

Es gilt:  $R_{vn} = r \cdot q^1 + r \cdot q^2 + r \cdot q^3 + \dots + r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^n \quad | \cdot q$

$\Leftrightarrow R_{vn} \cdot q = r \cdot q^2 + r \cdot q^3 + r \cdot q^4 + \dots + r \cdot q^n + r \cdot q^{n+1} \quad | - R_{vn}$

$\Leftrightarrow R_{vn} \cdot q - R_{vn} = r \cdot q^2 + r \cdot q^3 + \dots + r \cdot q^n + r \cdot q^{n+1} - R_{vn}$

$\Leftrightarrow R_{vn} \cdot q - R_{vn} = \cancel{r \cdot q^2} + \cancel{r \cdot q^3} + \dots + \cancel{r \cdot q^n} + \underbrace{r \cdot q^{n+1}} - \underbrace{r \cdot q^1}_{\cancel{r \cdot q^1}} - \cancel{r \cdot q^2} - \cancel{r \cdot q^3} - \dots - \cancel{r \cdot q^{n-1}} - \cancel{r \cdot q^n}$

$\Leftrightarrow R_{vn} \cdot q - R_{vn} = r \cdot q^{n+1} - r \cdot q$  Ausklammern von  $R_{vn}$  links und  $r \cdot q$  rechts

$\Leftrightarrow R_{vn} \cdot (q-1) = r \cdot q (q^n - 1) \quad | : (q-1)$

$R_{vn} = r \cdot \frac{q \cdot (q^n - 1)}{(q-1)} \quad \checkmark$

## Rentenendwertformeln (Buch S.347)

Vorschüssiger Rentenendwert:  $R_{Vn} = r \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)} \cdot q$

nachschüssiger Rentenendwert  $R_n = r \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$

$r$  = Rente (Zahlung in gleicher Höhe)  
 $n$  = Laufzeit in Jahren  
 $q = 1 + \frac{p}{100}$  Aufzinsungsfaktor  
 $R_{Vn}, R_n$ : Gesamtwert der Rentenzahlung inkl. Zinsen am Ende der Laufzeit

Bsp: Sifet spart 2400 € für 50 Jahre zu 1,2% p.a Zinsen und zahlt immer am Jahresanfang ein.  $\Rightarrow$  vorschüssiger Rentenendwert gesucht

$$R_{V50} = 2400 \text{ €} \cdot \frac{(1,012^{50} - 1)}{(1,012 - 1)} \cdot 1,012 = \underline{\underline{165082,05 \text{ €}}}$$

Übung: S. 350, Nr. 1 a-c

$$1a) R_{V10} = 1800 \text{ €} \cdot \frac{(1,05^{10} - 1)}{(1,05 - 1)} \cdot 1,05 = 23772,22 \text{ €}$$

$$R_{10} = 1800 \text{ €} \cdot \frac{(1,05^{10} - 1)}{(1,05 - 1)} = 22640,21 \text{ €}$$

$$b) R_{V15} = 154524,06 \text{ €}$$

$$R_{15} = 145093,02 \text{ €}$$

$$c) R_{V6} = 172457,36 \text{ €}$$

$$R_6 = 165824,39 \text{ €}$$

## Berechnung des Rentenbarwerts

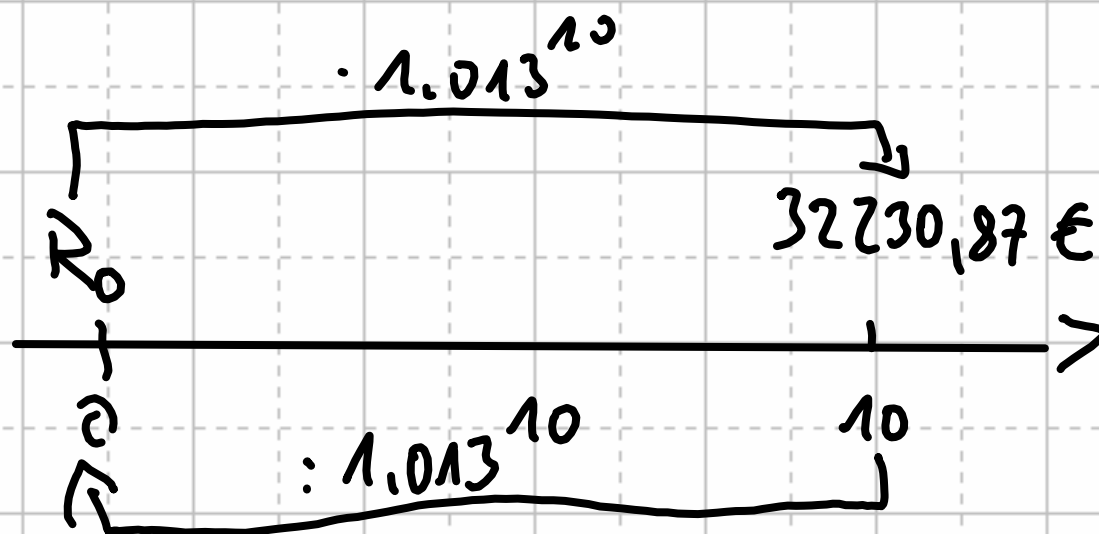
Ilias hat Anspruch auf eine 10-jährige vorschüssige Rentenzahlung in Höhe von 3000 €, möchte aber lieber den Wert der Rente heute mit einer ~~ein~~ einzigen Zahlung bekommen. Kalkulieren Sie mit 1,3% p.a. und berechnen Sie den Barwert der Rentenzahlung.

1. Schritt: Rentenendwert berechnen

$$R_{V10} = 3000 \text{ €} \cdot \frac{(1,013^{10} - 1)}{(1,013 - 1)} \cdot 1,013 = 32230,87 \text{ €}$$

2. Schritt: Barwert  $R_0$  ausrechnen (Rückrechnung von  $R_{V10}$  auf heute)

$$R_0 = \frac{R_{V10}}{q^{10}} = \frac{32230,87 \text{ €}}{1,013^{10}}$$



$$\begin{aligned} &= \cancel{23982,79 \text{ €}} \\ &= 28325,50 \text{ €} \end{aligned}$$

Antwort: Der Rentenendwert von  $32730,87 \text{ €}$  ist identisch mit einer heutigen Zahlung von  $28325,50 \text{ €}$  (Rentenbarwert). Ilias müsste also  $28325,50 \text{ €}$  in einer Zahlung heute bekommen, damit der Wert der 10-jährigen vor-schüssigen Rente von  $3000 \text{ €}$  gleichwertig ist.