Aufgabe 3: Herr Nemec ist Vorstand eines mittelständischen Unternehmens gewesen und möchte nun mit 63 Jahren aufhören zu arbeiten, um Zeit mit seinen Enkelkindern zu verbringen. Er hat mit ein wenig Glück an der Börse ein kleines Vermögen gemacht und hat nun eine Summe von 2.700.000 € zur Verfügung. Diese Summe legt er bei einer Versicherung in ein Produkt an, bei dem er eine jährliche nachschüssige Rente erhält, die 25 Jahre gezahlt wird. Der Zinssatz beträgt 1% p.a. Nach 25 Jahren soll das Vermögen aufgebraucht sein. Berechnen Sie, welche Rente er unter diesen Bedingungen jährlich erhält.

Aufgabe 4: Herr Linke hat nach seiner Zeit als Profisportler genug vom Arbeiten und möchte einen Teil seiner Ersparnisse in ein Rentenprodukt anlegen. Ein Kapital von 6.000.000 € möchte er für die nächsten 30 Jahre als vorschüssig gezahlte Rente ausgezahlt bekommen, bei einer Verzinsung von 1,4% p.a. In den letzten Jahren hatte er ein durchschnittliches Einkommen von 250.000 € pro Jahr. Prüfen Sie, ob seine jährliche vorschüssige Rentenzahlung in den nächsten 30 Jahren in etwa dieser Summe entspricht.

4) Ansatz: $K_{30} = R_{v30}$

$\Leftrightarrow \boxed{6\,000\,000\,€ \cdot 1{,}014^{30}} = r \cdot \boxed{\frac{(1{,}014^{30} - 1)}{(1{,}014 - 1)} \cdot 1{,}014}$

$\Leftrightarrow 9\,105\,208{,}61\,€ = r \cdot 37{,}4843 \quad | : 37{,}4843$

$\Leftrightarrow 242\,907{,}26\,€ = r$

Durch die jährliche Rentenzahlung erhält Herr Linke fast die 250 000 €, die er verdient hat, während er gearbeitet hat.

3) Gegeben: $K_0 = 2\,700\,000$ €

$n = 25$ Jahre

$p = 1\%$ p.a $\Rightarrow q = 1{,}01$

nachschüssig

gesucht: Rente r

Überschlag: ohne Zinsen

$\frac{2\,700\,000}{25} = 108\,000$

$\rightarrow$ Rente r muss mehr sein wg. Zinsen

Ansatz: $K_n = R_n$

$K_0 \cdot q^n = r \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q-1)}$

$\Leftrightarrow 2\,700\,000\,€ \cdot 1{,}01^{25} = r \cdot \frac{(1{,}01^{25} - 1)}{(1{,}01 - 1)}$

$\Leftrightarrow 3\,462\,566{,}39\,€ = r \cdot 28{,}2432 \quad | : 28{,}2432$

$\Leftrightarrow 122\,598{,}23\,€ = r$

Die Rente beträgt 122 598,23 €

gung (= Annuität – Zinsen) und der Restschuld (=Restschuld alt – Tilgung)

- Restschulden berechnen

Übungsaufgaben: Sie dürfen verwenden: $A = K \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{}$

Ansatz: $K_{20} = R_{20}$

$$\Leftrightarrow K_0 \cdot q^n = r \cdot \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 100\,000\,€ \cdot 1{,}065^{20} = r \cdot \frac{(1{,}065^{20} - 1)}{(1{,}065 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 352\,364{,}51\,€ = r \cdot 38{,}8253 \quad \Big| : 38{,}8253$$

$$\Leftrightarrow \frac{352\,364{,}51\,€}{38{,}8253} = r = \underline{9075{,}64\,€}$$

Der Lottogewinner kann sich eine jährliche nachschüssige Rente über 20 Jahre in Höhe von 9075,64 € auszahlen lassen.

Probe: $R_{20} = 9075{,}64\,€ \cdot \frac{(1{,}065^{20} - 1)}{(1{,}065 - 1)} = 352\,364{,}52\,€$ ✓

Rundungsproblematik

5.3. Annuitätendarlehen

Darlehenssumme: 3 000 000 € Zinssatz: 1,2 % p.a.

Laufzeit: 15 Jahre

Die Darlehenssumme soll in jährlichen, nachschüssig gezahlten Annuitäten zurück gezahlt werden.

Annuität: jährlich wiederkehrende Zahlung in gleicher Höhe (nachschüssig)

Berechnung der Annuität mit Formel

$$A = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{(q^n - 1)} = 3\,000\,000\,€ \cdot \frac{1{,}012^{15} \cdot (1{,}012 - 1)}{(1{,}012^{15} - 1)} = \underline{219\,734{,}11\,€}$$

Annuität = Zins + Tilgung

Tilgungsplan

Jahr	Restschuld Jahresbeginn	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld Jahresende
1	3 000 000 €	219 734,11 €	36 000 €	183 734,11 €	2 816 265,89 €
2	2 816 265,89 €				

Zinsen 1. Jahr: $3000000 € \cdot \frac{1,2}{100} = 36000 €$

Tilgung 1. Jahr: Annuität − Zinsen 1. Jahr

$219734,11 € - 36000 € = 183734,11 €$

Restschuld Jahresende: Restschuld Jahresbeginn − Tilgung

$3000000 € - 183734.11 €$