

$$\text{Annuität: } A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{(q-1)}{(q^n-1)}$$

Hinweis: **Runden** Sie bei **Euro-Beträgen** immer kaufmännisch auf **zwei Stellen** nach dem Komma und bei **Zinssätzen** immer auf **vier Stellen** nach dem Komma.

Aufgabe 0

Die FlyBike Werke GmbH hat für die Investition in eine moderne Produktionsmaschine ein Annuitätendarlehen aufgenommen. Das Darlehen in Höhe von **120.000 EUR** soll mit **1,75%** verzinst werden. Die Tilgung soll vollständig innerhalb von **10 Jahren** durch gleich hohe Annuitäten erfolgen.

- a) Ermitteln Sie die jährliche Annuität. ✓
- b) Stellen Sie den Tilgungsplan für die ersten zwei Jahre auf. ✓
- c) Berechnen Sie die Restschuld nach 4 Jahren. ✓

Tilgungsplan:

Jahre	Restschuld zu Beginn des Jahres	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Ende des Jahres
1	120 000 €	13 185,04 €	2 100 €	11 085,04 €	108 914,96 €
2	108 914,96 €	13 185,04 €	1 906,01 €	11 279,03 €	97 635,93 €

$$\begin{aligned}
 c) \quad RS_4 &= K_0 \cdot q^4 - A \cdot \frac{(q^4-1)}{(q-1)} \\
 &= 120\,000 \text{ €} \cdot 1,0175^4 - 13\,185,04 \text{ €} \cdot \frac{(1,0175^4-1)}{(1,0175-1)} \\
 &= \underline{\underline{74\,482,27 \text{ €}}}
 \end{aligned}$$

a) $n = 10$

$K_0 = 120\,000 \text{ €}$

$q = 1 + \frac{1,75}{100} = 1,0175$

$$\begin{aligned}
 A &= 120\,000 \text{ €} \cdot 1,0175^{10} \cdot \frac{(1,0175-1)}{(1,0175^{10}-1)} \\
 &= \underline{\underline{13\,185,04 \text{ €}}}
 \end{aligned}$$

$$Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100} = 120\,000 \cdot \frac{1,75}{100} = 2100$$

$$T_1 = A - Z_1$$

$$RS_1 = RS_0 - T_1$$

Aufgabe 1

Ein Kapital von 8.000 € soll 5 Jahre zu einem Zinssatz von 0,5% p.a. angelegt werden.

- a) Berechnen Sie das Kapital, das am Ende der fünf Jahre zur Verfügung steht. ✓ 9600 €
- b) Ermitteln Sie den Zinssatz, der nötig wäre, um in fünf Jahren ein Endkapital von 6.000 € zu erhalten und beurteilen Sie, ob dieser Zinssatz aktuell realistisch ist. ✓

Aufgabe 2

Sera möchte sich ein Auto kaufen, das 4.000 € kostet. Sie muss sich diese Summe leihen und in fünf Jahren komplett auf einmal zurückzahlen. Ein Kreditvermittler bietet ihr einen Zinssatz von 0,2% pro Monat an. Berechnen Sie die Summe, die Sarah in fünf Jahren zurückzahlen muss und ermitteln Sie den Effektivzins.

Aufgabe 3

Stefanie spart von ihrem Gehalt 10 Jahre lang, jedes Jahr 600 € zu Beginn des Jahres und erhält einen Zinssatz von 1,5% p.a. Ermitteln Sie den Rentenendwert.

Aufgabe 4)

Der Werkschef der Fly Bike GmbH Herr Partmann (66 Jahre alt) steht kurz vor seiner Rente. Aus seiner Lebensversicherung hat er Anspruch auf eine Summe von 40.000 €. Er möchte sich aus diesem Guthaben für die nächsten 20 Jahre eine vorschüssige Rente auszahlen lassen. Der aktuelle Zinssatz liegt bei 0,7% p.a. Berechnen Sie die Höhe der Rente, die sich Herr Partmann auszahlen lassen kann.

Lösungen zur Selbstkontrolle:

1a) 8.202,01 € 1b) $p = 3,714\%$ p.a. → nein, der Zinssatz ist zu hoch.

2) 4.529,45 € und $p_{\text{eff}} = 2,4266\%$ p.a.

3) 6.517,96 €

4) $r = 2.135,30$ €

0a) $A = 13.185,04$ €

0b)

Jahre	Restschuld zu Beginn des Jahres	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Ende des Jahres
1	120.000,00 €	13.185,04 €	2.100,00 €	11.085,04 €	108.914,96 €
2	108.914,96 €	13.185,04 €	1.906,01 €	11.279,03 €	97.635,93 €

$$a) K_5 = K_0 \cdot q^5$$

$$= 8000 \text{ €} \cdot \underbrace{1,005^5}_{= 1 + \frac{0,5}{100}} = 8202,01 \text{ €}$$

b) gesucht: $p \rightarrow$ Umstellen nach q
 \rightarrow aus q dann p berechnen

$$K_5 = K_0 \cdot q^5 \quad | : K_0 \Leftrightarrow \frac{K_5}{K_0} = q^5 \quad | \sqrt[5]{\quad}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{K_5}{K_0}\right)} = q = \sqrt[5]{\left(\frac{9600 \text{ €}}{8000 \text{ €}}\right)} = 1,03714$$

$$p = (q - 1) \cdot 100 = (1,03714 - 1) \cdot 100$$

$$= 3,714\% \text{ p.a.}$$

Aufgabe 2

Sera möchte sich ein Auto kaufen, das 4.000 € kostet. Sie muss sich diese Summe leihen und in fünf Jahren komplett auf einmal zurückzahlen. Ein Kreditvermittler bietet ihr einen Zinssatz von 0,2% pro Monat an. Berechnen Sie die Summe, die Sarah in fünf Jahren zurückzahlen muss und ermitteln Sie den Effektivzins.

Aufgabe 3

Stefanie spart von ihrem Gehalt 10 Jahre lang, jedes Jahr 600 € zu Beginn des Jahres und erhält einen Zinssatz von 1,5% p.a. Ermitteln Sie den Rentenendwert.

Aufgabe 4)

Der Werkschef der Fly Bike GmbH Herr Partmann (66 Jahre alt) steht kurz vor seiner Rente. Aus seiner Lebensversicherung hat er Anspruch auf eine Summe von 40.000 €. Er möchte sich aus diesem Guthaben für die nächsten 20 Jahre eine vorschüssige Rente auszahlen lassen. Der aktuelle Zinssatz liegt bei 0,7% p.a. Berechnen Sie die Höhe der Rente, die sich Herr Partmann auszahlen lassen kann.

Lösungen zur Selbstkontrolle:

1a) 8.202,01 € 1b) $p = 3,714\%$ p.a. → nein, der Zinssatz ist zu hoch.

2) 4.529,45 € und $p_{\text{eff}} = 2,4266\%$ p.a.

3) 6.517,96 €

4) $r = 2.135,30$ €

0a) $A = 13.185,04$ €

0b)

Jahre	Restschuld zu Beginn des Jahres	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Ende des Jahres
1	120.000,00 €	13.185,04 €	2.100,00 €	11.085,04 €	108.914,96 €
2	108.914,96 €	13.185,04 €	1.906,01 €	11.279,03 €	97.635,93 €

0c) $R_4 = 74.482,27$ €

→ Unterjährige Verzinsung

Zinsperioden pro Jahr: $m = 12$

" in 5 Jahren: $5 \cdot 12 = 60$

$$K_5 = K_{60} = 4000 \text{ €} \cdot 1,002^{60} = 4509,45 \text{ €}$$

$$\text{Effektivzins: } \left(1 + \frac{i}{100}\right)^m =$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{0,2}{100}\right)^{12} = 1,002^{12}$$

$$= 1,024266$$

$$p_{\text{eff}} = \left(\left(1 + \frac{i}{100}\right)^m - 1 \right) \cdot 100$$

$$= (1,024266 - 1) \cdot 100 = 2,4266\% \text{ p.a.}$$

Probe mit p_{eff}

$$K_5 = 4000 \text{ €} \cdot 1,024266^5 = 4509,45 \text{ €} \checkmark$$

Aufgabe 3

Stefanie spart von ihrem Gehalt 10 Jahre lang, jedes Jahr 600 € zu Beginn des Jahres und erhält einen Zinssatz von 1,5% p.a. Ermitteln Sie den Rentenendwert.

Aufgabe 4)

Der Werkschef der Fly Bike GmbH Herr Partmann (66 Jahre alt) steht kurz vor seiner Rente. Aus seiner Lebensversicherung hat er Anspruch auf eine Summe von 40.000 €. Er möchte sich aus diesem Guthaben für die nächsten 20 Jahre eine vorschüssige Rente auszahlen lassen. Der aktuelle Zinssatz liegt bei 0,7% p.a. Berechnen Sie die Höhe der Rente, die sich Herr Partmann auszahlen lassen kann.

Lösungen zur Selbstkontrolle:

1a) 8.202,01 € 1b) $p = 3,714\%$ p.a. → nein, der Zinssatz ist zu hoch.

2) 4.529,45 € und $p_{\text{eff}} = 2,4266\%$ p.a.

3) 6.517,96 €

4) $r = 2.135,30$ €

0a) $A = 13.185,04$ €

0b)

Jahre	Restschuld zu Beginn des Jahres	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Ende des Jahres
1	120.000,00 €	13.185,04 €	2.100,00 €	11.085,04 €	108.914,96 €
2	108.914,96 €	13.185,04 €	1.906,01 €	11.279,03 €	97.635,93 €

0c) $R_4 = 74.482,27$ €

→ vorschüssiger Rentenendwert R_{V10}

→ Einsetzen in Formel

$$\text{gegeben: } q = 1,015$$

$$r = 600 \text{ €}$$

$$n = 10$$

$$R_{V10} = r \cdot \frac{(q^{10} - 1)}{(q - 1)} \cdot q$$
$$= 600 \text{ €} \cdot \frac{(1,015^{10} - 1)}{(1,015 - 1)} \cdot 1,015$$

$$= \underline{\underline{6517,96 \text{ €}}}$$

Aufgabe 4)

Der Werkschef der Fly Bike GmbH Herr Partmann (66 Jahre alt) steht kurz vor seiner Rente. Aus seiner Lebensversicherung hat er Anspruch auf eine Summe von 40.000 €. Er möchte sich aus diesem Guthaben für die nächsten 20 Jahre eine vorschüssige Rente auszahlen lassen. Der aktuelle Zinssatz liegt bei 0,7% p.a. Berechnen Sie die Höhe der Rente, die sich Herr Partmann auszahlen lassen kann.

↳ Überschlag: ohne Zinsen

$$\frac{40000 \text{ €}}{20 \text{ Jahre}} = 2000 \text{ € (Jahr)}$$

Lösungen zur Selbstkontrolle:

1a) 8.202,01 € 1b) $p = 3,714\%$ p.a. → nein, der Zinssatz ist zu hoch.

2) 4.529,45 € und $p_{\text{eff}} = 2,4266\%$ p.a.

3) 6.517,96 €

4) $r = 2.135,30 \text{ €}$

0a) $A = 13.185,04 \text{ €}$

0b)

Jahre	Restschuld zu Beginn des Jahres	Annuität	Zinsen	Tilgung	Restschuld am Ende des Jahres
1	120.000,00 €	13.185,04 €	2.100,00 €	11.085,04 €	108.914,96 €
2	108.914,96 €	13.185,04 €	1.906,01 €	11.279,03 €	97.635,93 €

0c) $R_4 = 74.482,27 \text{ €}$

Ansatz: Kapitalendwert = Rentenendwert (vorschüssig)

gesucht: Rente r

gegeben: $K_0 = 40000 \text{ €}$

$n = 20$

$p = 0.7\% \text{ p.a.} \Rightarrow q = 1.007$

$$K_{20} = R_{v20}$$

$$40000 \text{ €} \cdot 1.007^{20} = r \cdot \frac{(1.007^{20} - 1)}{(1.007 - 1)} \cdot 1.007$$

$$\Leftrightarrow 45988,52 \text{ €} = r \cdot 21,5373 \quad | : 21,5373$$

$$\Leftrightarrow 2135,30 \text{ €} = r$$