WGY12, MLk, 5.11.21

Eulersche Zahl und Exponentialfunktion

Erinnerung: $e := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \approx 2{,}71828$

Definition einer Funktion mit dieser Reihe

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Test: $f(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^i}{i!} = \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots = e$

$f(2) = e^2 \qquad f(10) = e^{10} \qquad f(x) = e^x$

Neue Bezeichnung für diese Funktion

$$\exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$ Exponentialfunktion zur Basis e

Mit CAS: 1. Ableitung von e^x ?

$$f(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

CAS $f1(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$

$f1(x) = e^x$

Die Ableitung von e^x ist e^x ???

Test: $g(x) := 2^x$ $g'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$

$g(x) := 5^x$ $g'(x) = \ln(5) \cdot 5^x$

$g(x) := e^x$ $g'(x) = \ln(e) \cdot e^x = e^x$, da $\ln(e^1) = 1$

Beobachtung

Für Funktionen der Form $f(x) = a^x$ ist die 1. Ableitung $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$. Dabei gilt $a \neq 0$ und $\ln(a)$ ist der natürliche Logarithmus von a

Offenbar ist $\ln(e) = 1$ und daher ist für $f(x) = e^x$ die 1. Ableitung $f'(x) = \ln(e) \cdot e^x = 1 \cdot e^x = e^x$, also die Funktion selbst.

Man kann beweisen, dass es nur zwei Funktionen gibt, die diese Eigenschaft haben $(f'(x) = f(x))$, nämlich $f(x) = e^x$ und $f(x) = 0$.

Die 1. Ableitung von $f(x)=e^x$

$$f(x) = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{=1} + \underbrace{\frac{x^1}{1!}}_{=x} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \frac{5x^4}{5!} + \ldots$$

$$= 0 + 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot 1} + \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 1} + \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \frac{\cancel{5}x^4}{\cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} +$$

$$= 0 + 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\cdot 1} + \frac{x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= 0 + 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$