④ $f(x) = 5 \cdot e^{2x}$ $\quad u(x) = 5 \quad v(x) = e^{2x}$

$u'(x) = 0 \quad v'(x) = 2e^{2x}$

$f'(x) = (0 \cdot e^{2x}) + (5 \cdot 2e^{2x})$

$= 10 \cdot e^{2x}$ $\quad u(x) = 10 \quad v(x) = e^{2x}$

$u'(x) = 0 \quad v'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = (0 \cdot e^{2x}) + (10 \cdot 2e^{2x})$

$= 20 \cdot e^{2x}$

Kontrollergebnisse:

1) $f'(x) = (4 + 8x) \cdot e^{2x}$ $\quad f''(x) = (16 + 16x) \cdot e^{2x}$

2) $f'(x) = (15x - 27) \cdot e^{5x}$ $\quad f''(x) = (75x - 120) \cdot e^{5x}$

5) $f'(x) = e^{x}(3x + 3)$ $\quad f''(x) = e^{x} \cdot (3x + 6)$

WGY12, MLK
19.11.21

Die Kettenregel (Buch S. 238)

Für eine Verkettung von Funktionen benötigt man eine neue Ableitungsregel und die Unterscheidung von „innerer Funktion" und „äußerer Funktion".

Bsp: $f(x) = e^{2x}$

Die zuerst ausgeführte Funktion ist die innere Funktion in diesem Fall $2x$ und die innere Funktion wird in der Regel mit $v(x)$ bezeichnet.

Die äußere Funktion wird nach der inneren Funktion angewendet und in der Regel mit $u(x)$ bezeichnet. In diesem Fall ist die äußere Funktion „e hoch (2x)"

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$

Bsp: $f(x) = e^{2x}$

innere Funktion $v(x) = 2x$ innere Ableitung $v'(x) = 2$

äußere Funktion $u(y) = e^{y}$ äußere Ableitung $u'(y) = e^{y}$

$f'(x) = 2e^{2x}$ wobei 2 die innere Ableitung und e hoch die äußere Ableitung ist.

Übungen Kettenregel

a) $f(x) = e^{x^2}$

innere Funktion $v(x) = x^2$ $\quad v'(x) = 2x$

äußere Funktion $u(y) = e^y$ $\quad u'(y) = e^y$

$y = x^2$

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{v'} \cdot \underbrace{e^{x^2}}_{u'}$$

b) $f(x) = e^{3x+1}$

$$f'(x) = \underbrace{e^{3x+1}}_{u'} \cdot \underbrace{3}_{v'} = 3e^{3x+1}$$

Übungen:

c) $f(x) = e^{4x+3}$

d) $f(x) = e^{x-5}$

e) $f(x) = 6 \cdot e^{3x}$

f) $f(x) = e^{k \cdot x}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

g) $f(x) = 2x \cdot e^{2x}$

h) $f(x) = (x^3 + x) \cdot e^{x^2+x}$

jeweils $f'(x)$

Bsp. für Verkettungen

1) $f(x) = \sqrt{2 \cdot x}$ $\qquad f(18) = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

Man muss erst $2 \cdot 18 = 36$ rechnen	und dann die Wurzel ziehen
innere Funktion	äußere Funktion

2) $f(x) = e^{3x+1}$ $\qquad f(2) = e^{3 \cdot 2 + 1} = e^{7} = 1096{,}63$

erst $3 \cdot 2 + 1 = 7$	dann e^{7}
innere Funktion	äußere Funktion

Übungen Kettenregel

c) $f(x) = e^{4x-3}$ $\qquad f'(x) = \underbrace{4}_{v'} \cdot \underbrace{e^{4x+3}}_{u'}$ $\qquad v(x) = 4x+3$

d) $f(x) = e^{x-5}$ $\qquad f'(x) = \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{e^{x-5}}_{u'}$ $\qquad v(x) = 1x-5$

e) $f(x) = 6e^{3x}$ $\quad \rightarrow$ Tafel 7

f) $f(x) = e^{k \cdot x}$ $\qquad f'(x) = k \cdot e^{kx}$

g) $f(x) = 2x \cdot e^{2x}$

Produktregel: $u(x) = 2x$ $\qquad v(x) = e^{2x}$

$u'(x) = 2$ $\qquad v'(x) = 2e^{2x}$

$\downarrow$ mit Kettenregel

innen: $v(x) = 2x$

$v'(x) = 2$

außen: $u(y) = e^{y}$

$u'(y) = e^{y}$

$u'(x) \cdot v'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

$$f'(x) = \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v} + \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{2e^{2x}}_{v'}$$

$$= (2 + 2x \cdot 2)\, e^{2x}$$

$$= (2 + 4x)\, e^{2x}$$

h) $f(x) = (x^3+x) \cdot e^{x^2+x}$

$f'(x) = (2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1) \cdot e^{x^2+x}$

e) $f(x) = 6 \cdot e^{3x}$

Produktregel: $u(x) = 6$ $\quad v(x) = e^{3x}$

$u'(x) = 0$ $\quad v'(x) = 3e^{3x}$

↓ mit Kettenregel

innen $v(x) = 3x$

$v'(x) = 3$

außen $u(y) = e^{y}$

$u'(y) = e^{y}$

$\Rightarrow u' \cdot v' = e^{3x} \cdot 3$

$$f'(x) = \underbrace{0 \cdot e^{3x}}_{u' \cdot v} + \underbrace{6 \cdot 3e^{3x}}_{u \cdot v'}$$

$$= 18e^{3x}$$

zu viel Aufwand

Erinnerung: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

$f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$

$f(x) = 6e^{3x}$

$f'(x) = 6 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 18e^{3x}$