WGY12, MLK, 24.11.21

Aufgabe Navigationssysteme

Das Unternehmen GPM vertreibt mobile Navigationssysteme für die Autoindustrie. Für das neue Modell NavTag II, das sich nur in wenigen Details von seinem Vorgänger NavTag I unterscheidet, wird mit einer ähnlichen Absatzentwicklung kalkuliert. Für NavTag I wurden folgende Absatzzahlen ermittelt:

Zeit in Monaten	0	5	10	15
Absatzmenge in 1000	50	92,98	74,63	60,58

Die Absatzmenge zum Zeitpunkt x=0 ergibt sich aus langfristigen Verträgen, die während der Entwicklungsphase geschlossen wurden.

a) Der Absatzverlauf von NavTag II soll mit einer Exponentialfunktion modelliert werden: $f_{a;b}(x) = a \cdot x \cdot e^{-b \cdot x} + c$ mit a, b, c > 0

Bestimmen Sie Werte für a, c (Genauigkeit: 1 Nachkommastelle) und b (Genauigkeit: 2 Nachkommastellen), sodass die obigen Absatzzahlen durch $f_{a;b}(x)$ beschrieben werden.

Hinweis: Die Ergebnisse zur Kontrolle lauten a = 30, b = 0,25 und c = 50. Wenn Sie diese nicht ausrechnen können, definieren Sie nun für die folgenden Aufgaben neu:

$f(x) = 30 \cdot x \cdot e^{-0{,}25 \cdot x} + 50$

b) Die maximale Absatzmenge wird nach ca. 5 Monaten vermutet (vgl. Tabelle). Berechnen Sie den genauen Maximalwert mit der Funktion $f_{30;0,25}(x)$ und zeigen Sie, dass im 8. Monat der Absatz am stärksten zurückgeht.

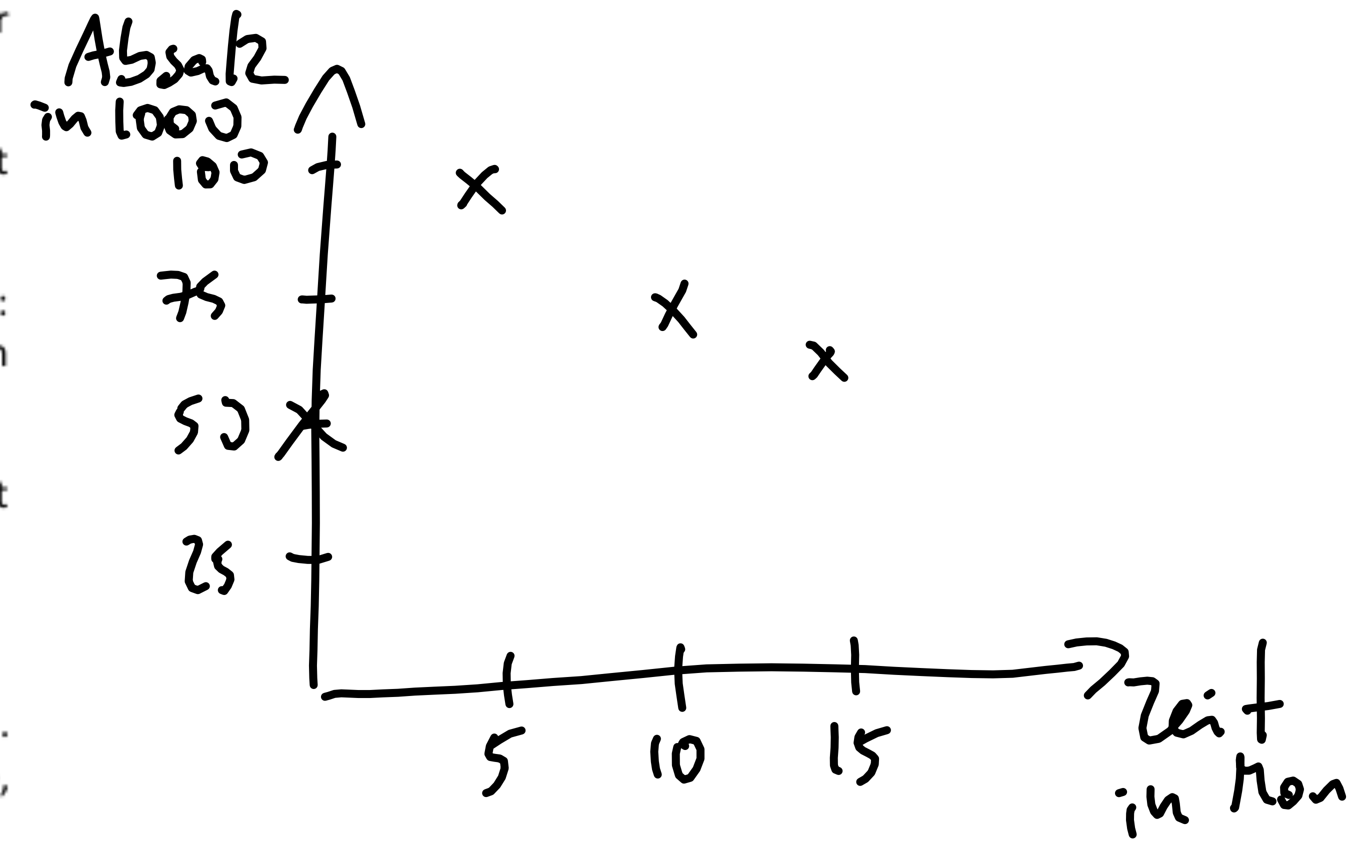
c) GPM ist sich darüber im Klaren, dass über die gemachten Verträge nur eine kurzzeitige Absatzsteigerung möglich ist, da das Unternehmen den Privatkundenmarkt nicht gezielt bedient. Ermitteln Sie die Absatzmenge, auf die sich das Navigationssystem langfristig einpendeln wird und skizzieren Sie den Graphen.

d) Obwohl die Absatzzahlen schwanken, hält das Unternehmen an einem Preis (in €) für das NavTag II fest, der sich aus dem vom Controlling ermittelten Angebots- und Nachfragefunktionen ergibt: $p_1(x) = (-2{,}7x + 242) \cdot e^{0{,}01x}$ und $p_2(x) = (0{,}5x + 50) \cdot e^{0{,}01x}$

Begründen Sie aus dem Sachverhalt, welche Funktion die Angebots- und Nachfragefunktion ist, und bestimmen Sie dann das Marktgleichgewicht.

a) Nicht nötig, aber hilfreich

Skizze



$f_{a,b}(x) = a \cdot x \cdot e^{-b \cdot x} + c$

a und b und c sind Parameter

a) Vorgehen: 1) Funktion definieren

CAS: $fab(x) := a \cdot x \cdot e^{-b \cdot x} + c$

2) Aufstellen eines Gleichungssystems und Lösung mit solve (menu → 3 → 7 → 1)

Algebra Gl...system Lösen

Anzahl Gleichungen: 3 pro Parameter eine Gleichung

Variablen: a, b, c

$$\text{solve}\left(\begin{cases} fab(0)=50 \\ fab(5)=92{,}98 \\ fab(10)=74{,}63 \end{cases},\ \{a,b,c\}\right)$$

$a=30 \quad b=0{,}25 \quad c=50$

a) Die Absatzmengen werden durch die Funktion $f(x) = \underbrace{30}_{a} \cdot x \cdot e^{\underbrace{-0{,}25}_{b} \cdot x} + \underbrace{50}_{c}$ modelliert!

Wichtig: Für weitere Aufgaben neu definieren

CAS: $f(x) := 30 \cdot x \cdot e^{-0.25 \cdot x} + 50$

b) gesucht sind
- der Hochpunkt („maximale Absatzmenge") und
- der Wendepunkt („Absatz geht am stärksten zurück")

Hochpunkt: mit CAS: $\underbrace{f1(x) := \frac{d}{dx}(f(x)}_{f'(x)}$ $\underbrace{f2(x) := \frac{d}{dx}(f1(x))}_{f''(x)}$ $\underbrace{f3(x) := \frac{d}{dx}(f2(x))}_{f'''(x)}$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ CAS: solve $(f1(x) = 0, x)$ oder zeros$(f1(x), x)$

Hinr. Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$: $f''(4) = -2{,}76 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = 4$

y-Wert: $f(4) = 94{,}15$

HP$(4 \mid 94{,}15)$

b) Wendepunkt

Notw. Bed. : $f''(x) = 0 \iff x = 8$ CAS: solve(f2(x)=0, x)
zeros(f2(x), x)

Hinr. Bed. : $f''(x)=0 \wedge f'''(x) \neq 0$: $f'''(8) = 0{,}25 \neq 0 \Rightarrow$ WP bei $x = 8$

y-Wert : $f(8) = 82{,}48$

WP(8 | 82,48)

Antwort: Die maximale Absatzmenge von 94 150 (= 94,15 · 1000) wird im 4. Monat erreicht. Der stärkste Absatzrückgang ist im 8. Monat, weil das der x-Wert des Wendepunktes ist.

Hinweis: Operator: „Berechne" bedeutet, dass eine rechnerische Lösung verlangt wird!
Operator: „Zeigen Sie" " dass auch Alternativen möglich sind
z.B hier → Graph zeichnen → Graph analysieren → Wendepunkt