$$f_{a,b}(t) = a\cdot e^{-0{,}2\cdot(0{,}3\cdot t-b)^2}$$

angegeben. Dabei gibt $f_{a,b}(t)$ den Umsatz in GE pro Woche an. Es gilt $t \geq 0$. Die Parameter a und b hängen von der Konjunktur ab und sind positiv.

a) Berechnen Sie das Umsatzmaximum in Abhängigkeit von den Parametern a und b. Gehen Sie davon aus, dass die hinreichende Bedingung erfüllt ist.
b) Analysieren Sie die Auswirkungen von a und b auf das Umsatzmaximum.

Lösung:
Tipp um Doppelbelegungen zu vermeiden.
→ Entweder im Scratchpad vorher alle Variablen löschen mit doc → B: Scratchpad löschen oder
→ Neues Dokument mit on → 1 → Calculator hinzufügen!

a) Funktion definieren als $f(a,b,t) := a\cdot e^{-0{,}2\cdot(0{,}3\cdot t-b)^2}$ und Ableitungen
$f'(a,b,t) := \frac{d}{dt}(f(a,b,t))$ $f''(t) := \frac{d}{dt}(f'(a,b,t))$
CAS-Befehle: $f1(a,b,t) := \frac{d}{dt}(f(a,b,t))$ $f2(a,b,t) := \frac{d}{dt}(f1(a,b,t))$
Notwendige Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3{,}333\cdot b$ or a=0 (a muss positiv sein, kann also ignoriert werden und wird beim zeros-Befehl auch nicht angezeigt)
CAS-Befehl: solve(f1(a,b,t)=0,t) oder zeros(f1(a,b,t),t)

Hinreichende Bedingung für Maximum: $f'(t) = 0 \wedge f''(t) < 0$ ist erfüllt.

y-Wert: $f(a,b,3{,}33\cdot b) = a\cdot \underbrace{1^{b^2}}_{=1} = a$

a und b sind Parameter
$a > 0$ und $b > 0$

$\boxed{t \text{ ist die Variable}}$
$t \geq 0$

Notw. Bed. für Maximum
$f'(a,b,t) = 0 \Leftrightarrow$
CAS: solve(f1(a,b,t)=0, t)
$t = 3{,}33\cdot b$ or $a = 0$ ↳ immer die Variable nehmen!

„x-Wert" vom Maximum

a muss positiv sein, a=0 kann ignoriert werden

Umsatzmaximum liegt bei

$(3{,}33 \cdot b \,/\, a)$

a) Auswirkungen von a auf den x-Wert des Maximums:
→keine, der x-Wert (der Zeitpunkt des Maximums) ist von a unabhängig und liegt bei $x = 3{,}33 \cdot b$.

Auswirkungen von a auf den y-Wert des Maximums:
→ je größer der Wert von a, desto größer wird der maximale Umsatz

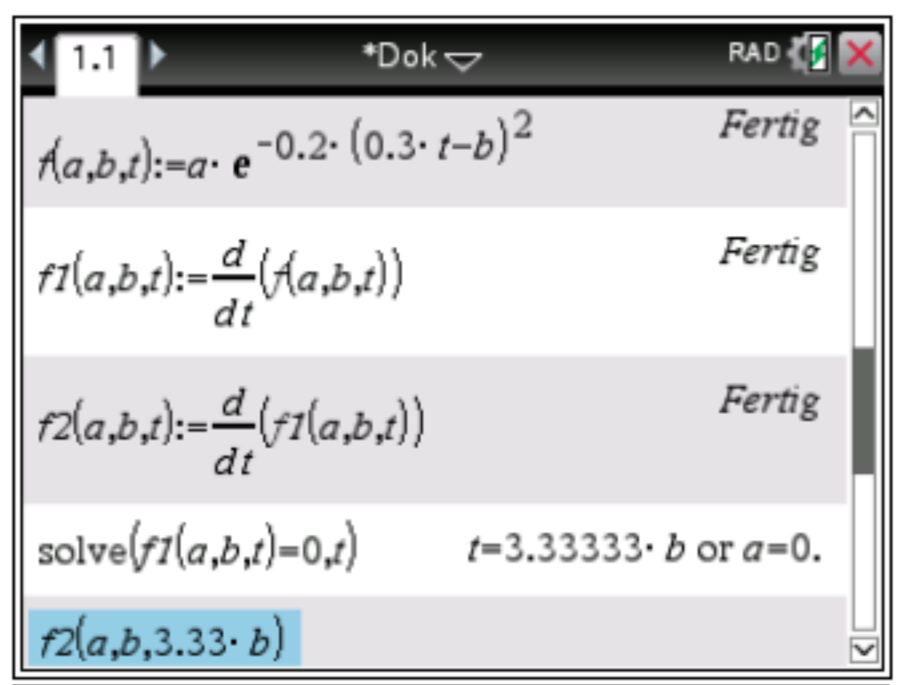
Auswirkungen von b auf den x-Wert des Maximums:
→je größer b wird, desto später wird das Umsatzmaximum erreicht

Auswirkungen von b auf den y-Wert des Maximums:
→ keine, der y-Wert nur von a beeinflusst wird.

<u>Zusammenfassung:</u>

→ Der Parameter a hat nur Auswirkungen auf die Höhe des maximalen Umsatzes und keine Auswirkungen auf den Zeitpunkt.

→ Der Parameter b hat nur Auswirkungen auf den Zeitpunkt, an dem der maximale Umsatz erreicht wird und keine Auswirkungen auf die Höhe des maximalen Umsatzes.



Wenn man ausrechnen möchte, welche Werte die Funktion für bestimmte Kombinationen von a und b annimmt, so setzt man diese Werte als Argumente in die Klammer ein, z.B. für die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt für a = 10 und b = 30:

solve(f1(10,30,t)=0,t)	t=100.
solve(f1(20,50,t)=0,t)	t=166.667
solve(f1(10,50,t)=0,t)	t=166.667
solve(f1(20,30,t)=0,t)	t=100.
solve(f1(10,40,t)=0,t)	t=133.333

solve(f1(20,30,t)=0,t)	t=100.
solve(f1(10,40,t)=0,t)	t=133.333
f(10,30,100)	10.
f(10,50,166.667)	10.
f(20,30,100)	20.

Es gilt: Umsatzmaximum bei $(3{,}33 \cdot b \mid a)$

Im Screenshot links sehen wir in der obersten Zeile, dass der Extrempunkt bei t = 100 liegt, wenn a = 10 und b = 30 ist. Weitere Beispielwerte sind in den folgenden Zeilen zu finden. Der y-Wert des Extrempunktes liegt für a =10 und b=30 bei 10 (siehe 3. Zeile im rechten Screenshot.) Da muss für t=100 eingesetzt werden.

<u>Übung:</u> Berechnen Sie den Zeitpunkt des maximalen Umsatzes (x-Wert vom Hochpunkt) und die Höhe des maximalen Umsatzes für folgende Kombinationen:

Wert für a	Wert für b	x-Wert vom HP	y-Wert vom HP
10	20	$3{,}\overline{33} \cdot 20 = 66{,}\overline{6}$	$9{,}9992 \approx 10$
30	50	$3{,}33 \cdot 50 = 166{,}5$	30
50	60	199,8	50
100	200	666	$99{,}20 \simeq 100$

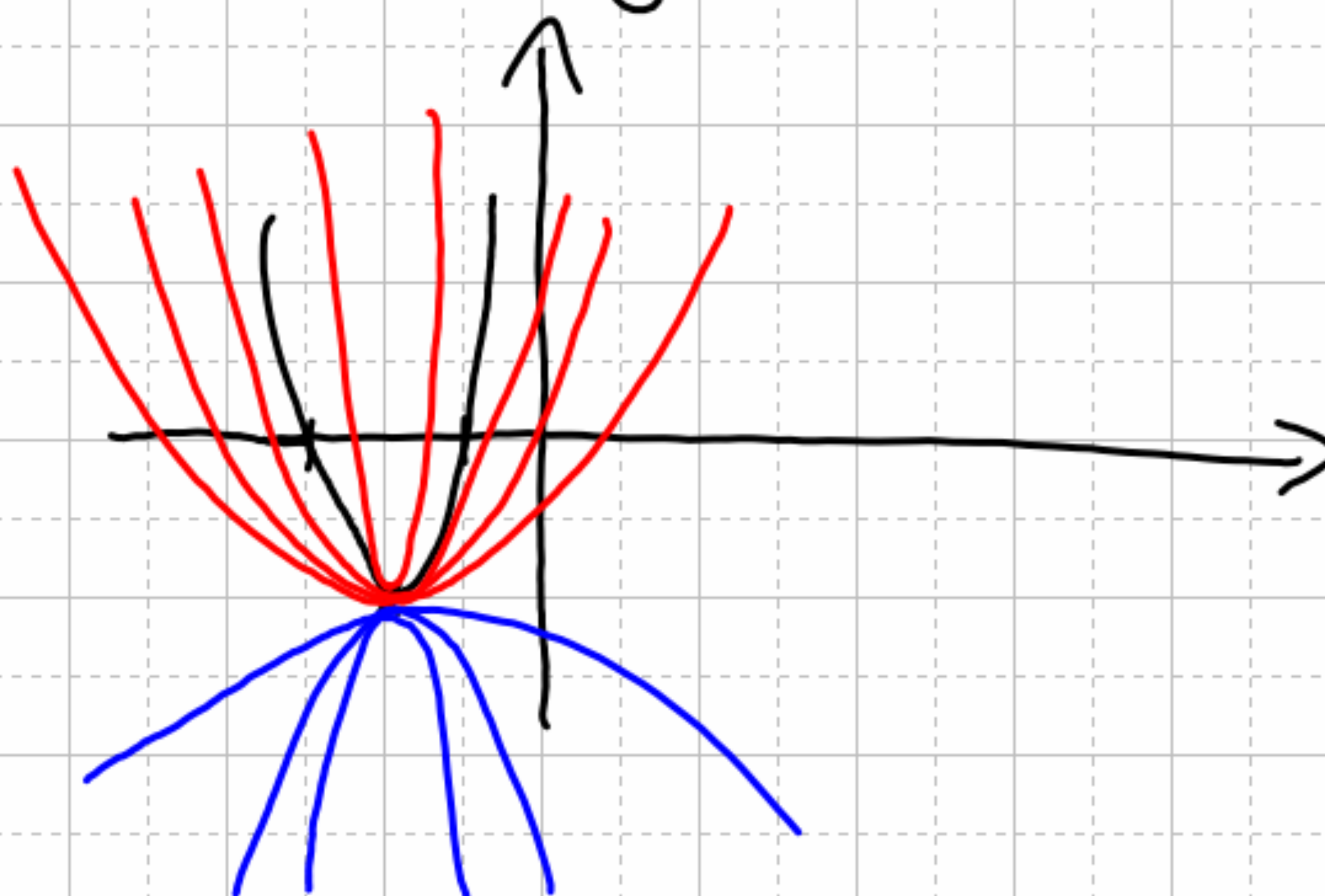
$f(10, 20, 3{,}33 \cdot 20)$

Einfaches Beispiel für Funktionen mit Parameter

$$f(x) = a \cdot x^2 + 4x + 3 \qquad a \neq 0$$

↳ hat Auswirkungen auf Öffnung der Parabel und Streckung oder Stauchung

Skizze



$a = 1$

Eine Veränderung von a hat

→ keine Auswirkungen auf den Scheitelpunkt

→ Auswirkungen auf die Lage und Anzahl der Nullstellen