# Kurvendiskussion

$$f(x) = (-2x-2) \cdot e^{-0{,}5x}$$

1) y-Abschnitt und Nullstelle
2) Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte)
3) Wendepunkte
4) Verhalten im Unendlichen (limes für $\pm\infty$)
5) Zeichnung / Skizze

Kontrollergebnisse : TP $(1 \mid -2{,}43)$ WP $(3 \mid -1{,}79)$

$f(x) = (-2x-2)\cdot e^{-0{,}5x}$ $\quad$ f(x) := definieren

1) <u>y-Abschnitt</u> : $f(0) = -2 \Rightarrow S_y(0/-2)$

<u>Nullstelle(n)</u> : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow S_x(-1|0)$

↳ solve (f(x)=0, x) oder zeros (f(x), x)

2) <u>Extrempunkte</u> : $f1(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$; $f2(x) := \frac{d}{dx}(f1(x))$; $f3(x) := \frac{d}{dx}(f2(x))$

↳ $f'(x)$ $\quad$ ↳ $f''(x)$ $\quad$ ↳ $f'''(x)$

Notw. Bed. für EP : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\quad$ mit solve oder zeros (f1(x), x)

Hinr. Bed. für EP : $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ $\quad$ $f''(1) = 0{,}61 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = 1$ $\quad$ f2(1)

y-Wert : $f(1) = -2{,}43$

↳ TP $(1/-2{,}43)$

3) <u>Wendepunkte</u> : Notw. Bed. für WP : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $\quad$ solve (f2(x)=0, x)

Hinr. Bed. für WP : $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ $\quad$ $f'''(3) = -0{,}11 \neq 0 \Rightarrow$ WP bei $x = 3$

y-Wert : $f(3) = -1{,}79$

↳ WP $(3/-1{,}79)$

4) Grenzwertverhalten

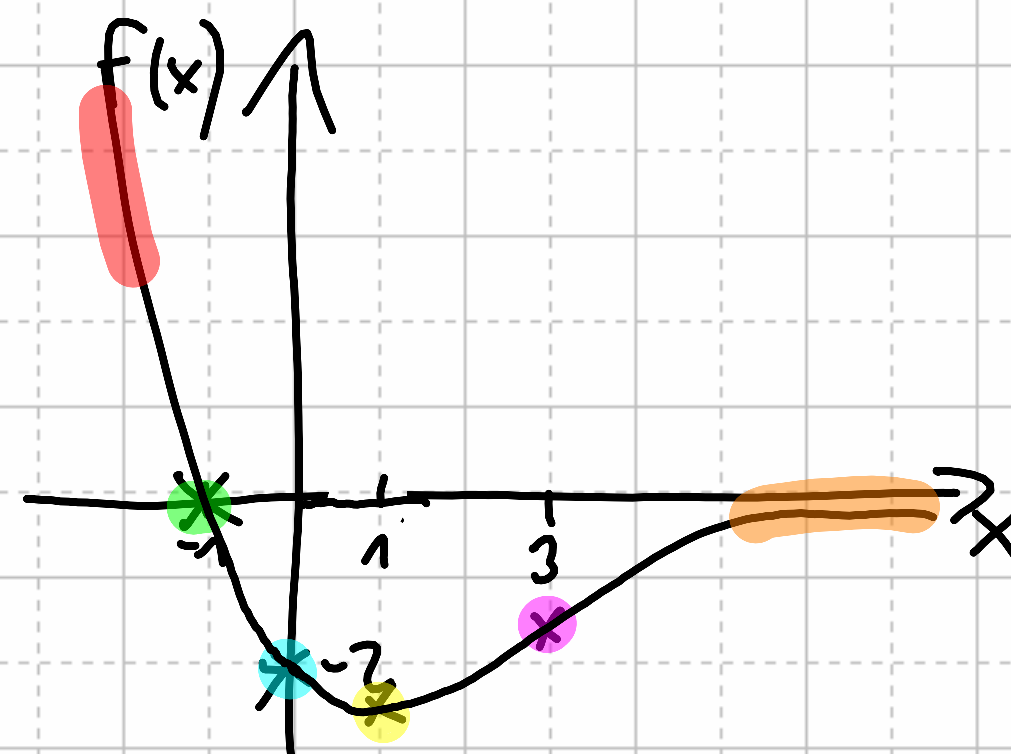
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

CAS: menu → 4 → 4 oder $\boxed{\lim_{\square \to \square} \square}$ → $\boxed{\lim_{\square \to \square} \square}$

5) Skizze

y-Achsenabschnitt: −2 $\qquad$ Nullstelle $x = -1$

TP ( 1 | −2,43 ) $\qquad$ WP ( 3 | −1,79 )



**Inhalte:**

- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen und von Exponentialfunktionen, auch mit Parameter (OHIMI und CAS)
    - Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte, Grenzwertverhalten, Zeichnungen der Graphen
- Ökonomische Anwendungen der Exponentialfunktion (z.B. Analyse von Absatzzahlen) (OHIMI und CAS)
- Produktlebenszyklus
- Ableitungen mit Produkt- und Kettenregel (OHIMI und CAS)
- Angebots- und Nachfragefunktionen, Marktgleichgewicht (nur CAS)
- Aufstellen von Funktionen mit Hilfe eines Gleichungssystems (Exponentialfunktionen und ganzrationale Funktionen) (nur CAS)
- Eigenschaften der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (OHIMI und CAS)
    - $e^x > 0$,
    - $e^x$ wächst schneller als jede ganzrationale Funktion
    - $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

<u>Davon noch nicht behandelt:</u>

- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen mit Parameter → Montag 29.11
- Produktlebenszyklus → Mittwoch 1.12
- Eigenschaften der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (OHIMI und CAS)
    - $e^x > 0$,
    - $e^x$ wächst schneller als jede ganzrationale Funktion
    - $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

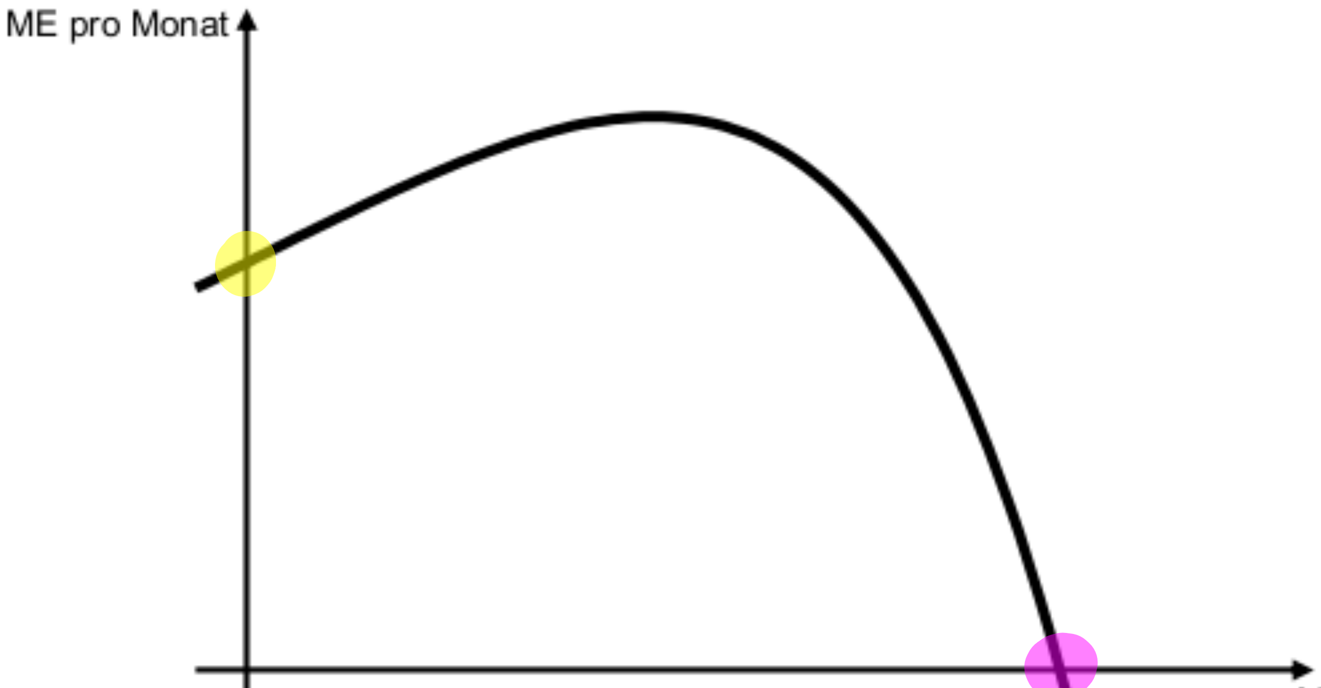
**Übersetzungshilfen:**

- maximaler Absatz -> Hochpunkt
- langfristiger Absatz -> Grenzwertverhalten (mit lim-Befehl)
- stärkster Rückgang -> Wendepunkt
- stärkster Anstieg -> Wendepunkt
- Übergang progressiv zu degressiv oder umgekehrt -> Wendepunkt
- Absatz zum Verkaufsstart: t=0 in Funktion einsetzen (y-Abschnitt)
- Produkt verschwindet vom Markt: Nullstelle berechnen

**(Übungen ohne Hilfsmittel)**

**Aufgabe 1**

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (50 - t)\cdot e^{0{,}05t}$ (t in Monaten und f(t) in ME) modelliert. Der folgende Graph verdeutlicht die Situation.




1.1 Ermitteln Sie die Absatzmenge zu Beginn des Verkaufsstarts.

1.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann.

1.3 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 30 liegt.

($f''(t) = \left(\frac{1}{40} - \frac{t}{400}\right)\cdot e^{0{,}05t}$ kann verwendet werden)

E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info Homepage: http://www.mathekannjeder.de

1.1) Einsetzen von t=0 in f(t)

$$f(0) = (50-0)\cdot \underbrace{e^{0{,}05\cdot 0}}_{=e^0=1}$$

$$= \underline{\underline{50}}$$

Die Absatzmenge zu Verkaufsstart beträgt 50 ME.

1.2. Nullstelle von f(t)

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow (50-t)\cdot \underbrace{e^{0{,}05t}}_{>0} = 0$$

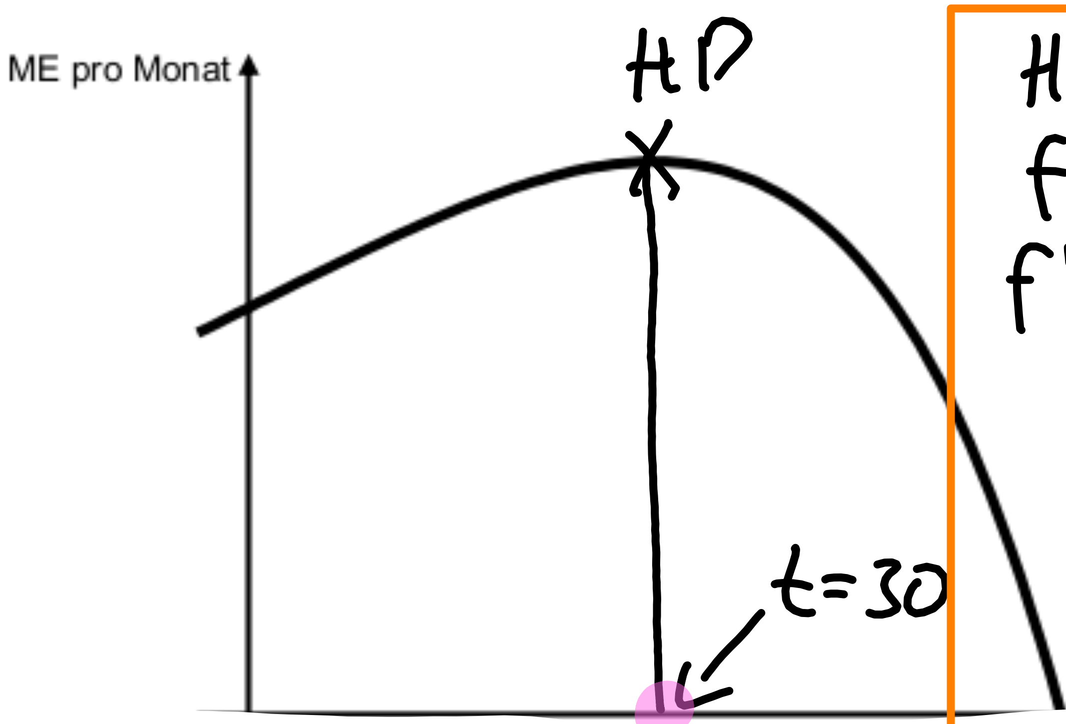
$$\Leftrightarrow 50 - t = 0 \quad |+t \quad \vee \quad e^{0{,}05t} = 0 \ ↯$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{50 = t}}$$

**(Übungen ohne Hilfsmittel)**

**Aufgabe 1**

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (50 - t) \cdot e^{0{,}05t}$ (t in Monaten und f(t) in ME) modelliert. Der folgende Graph verdeutlicht die Situation.




Hinr. Bed.

$f'(t) = 0 \wedge f''(t) < 0$

$f''(30) = \left(\frac{1}{40} - \frac{30}{400}\right) \cdot e^{0{,}05 \cdot 30}$

$= \left(\frac{10}{400} - \frac{30}{400}\right) \cdot e^{0{,}05 \cdot 30}$

$= \underbrace{-\frac{20}{400}}_{<0} \cdot \underbrace{e^{0{,}05 \cdot 30}}_{>0} < 0$

1.3 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei t = 30 liegt.

~~$\left(f''(t) = \left(\frac{1}{40} - \frac{t}{400}\right) \cdot e^{0{,}05t}\right.$ kann verwendet werden)~~

Notw. Bed. für HP: $f'(t) = 0$

$\Leftrightarrow (1{,}5 - 0{,}05t) \cdot \underbrace{e^{0{,}05t}}_{>0} = 0$

$\Rightarrow 1{,}5 - 0{,}05t = 0 \quad | -1{,}5$

$\Leftrightarrow -0{,}05t = -1{,}5 \quad | : (-0{,}05) \Leftrightarrow \underline{t = 30}$

Ergänzung zu 1.2

Satz vom Nullprodukt

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$

$\vee$

Bsp: $(x-3) \cdot (x+7) = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 7 = 0$

$\underline{x = 3} \qquad \underline{x = -7}$

Gesucht ist t-Wert vom HP

$f(t) = (50 - t) \cdot e^{0{,}05t}$

$u(t) = 50 - 1 \cdot t \qquad v(t) = e^{0{,}05t}$

$u'(t) = -1 \qquad v'(t) = 0{,}05 \cdot e^{0{,}05t}$

$\Rightarrow f'(t) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$

$= -1 \cdot e^{0{,}05t} + (50 - t) \cdot 0{,}05 \cdot e^{0{,}05t}$

$= (-1 + (50 - t) \cdot 0{,}05) \cdot e^{0{,}05t}$

$= (-1 + 2{,}5 - 0{,}05t) \cdot e^{0{,}05t} = (1{,}5 - 0{,}05t) \cdot e^{0{,}05t}$

**Aufgabe 2** Ermitteln Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.

a) $f(x) = 4x \cdot e^{3x}$  b) $g(x) = (x^2 + 5) \cdot e^{0,2x+2}$

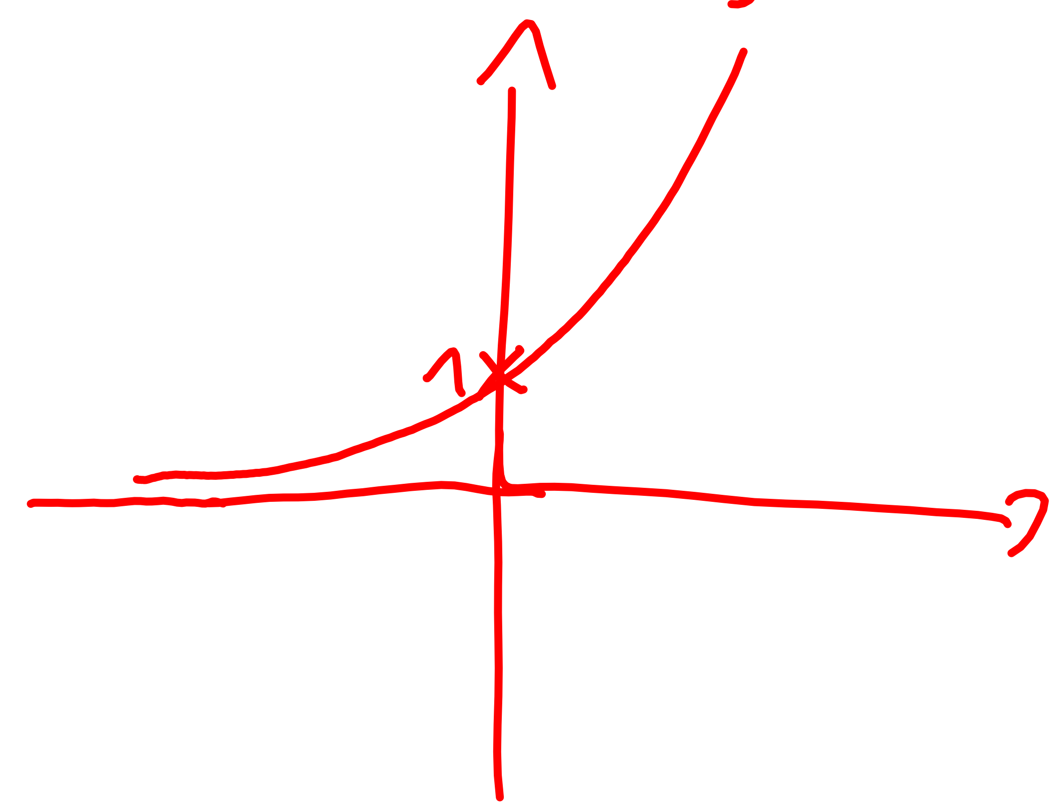
**Aufgabe 3** Die Unternehmensleitung der Cylenda GmbH entscheidet sich statt der bisher geplanten innovativen Werbung für ein klassisches Werbekonzept. Sie geht bei der Entwicklung der wöchentlichen Absatzzahlen deshalb von folgender Funktion g aus: $g(x) = 2{,}1x^2 \cdot e^{-0{,}12 \cdot x}$ Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung nach diesem Modell. (3P.)

↳ gesucht ist der Grenzwert von g(x)

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{2{,}1x^2}_{\downarrow\ \infty} \cdot \underbrace{e^{-0{,}12x}}_{\downarrow\ 0} = 0$$

Die e-Funktion wächst schneller als jede ganzrationale Funktion.

Erinnerung $e^x$




E-Mail: Carsten.Vooren@bkcr.info 