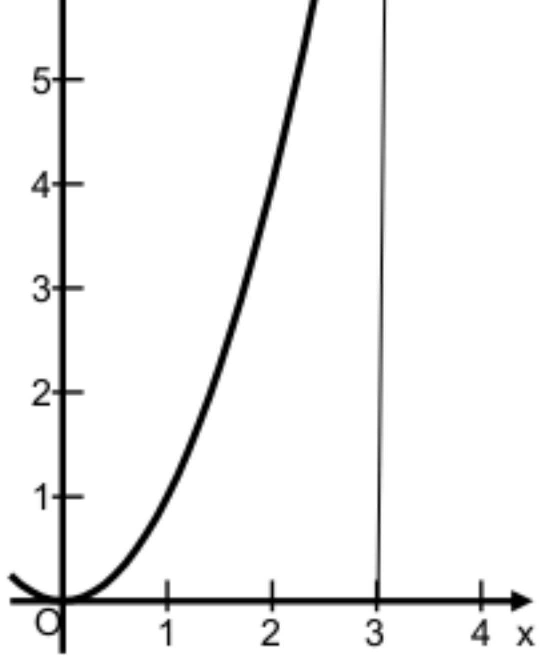


Formel für Summe aller n Rechtecke **unterhalb** der Funktion:

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{3}{n}\right)\right)$$

Formel für Summe aller n Rechtecke **oberhalb** der Funktion:

$$O_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{3}{n}\right)\right)$$

Anzahl Rechtecke n	Untersumme U_n	Obersumme O_n	Mittelwert $(U_n+O_n)/2$
12	7,90	10,16	9,03
20	8,34	9,69	9,01
30	8,56	9,46	9,01
48	8,72	9,28	9,002
200	8,93	9,07	9,0

Vermutung:
Untersumme und Obersumme laufen auf den Wert 9 zu.

Prüfung:

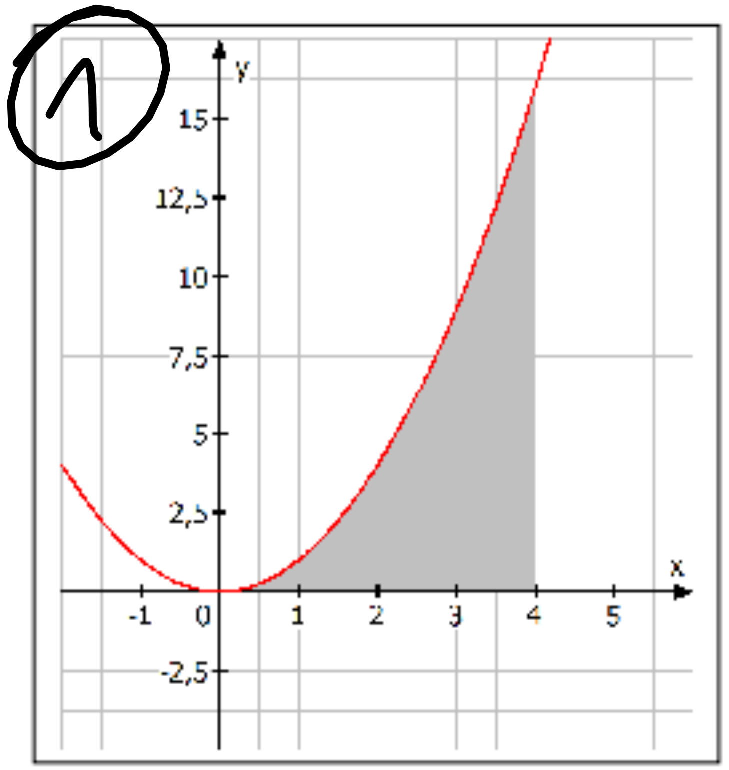
$$\lim_{n\to\infty} U_n = 9$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = 9$$

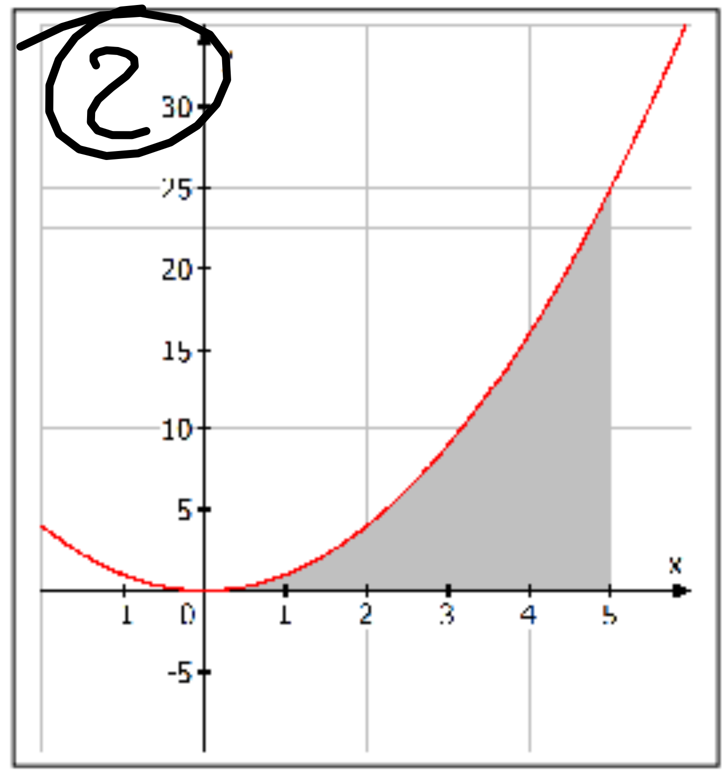
Aufgabe 3:

Passen Sie die Formel für die Unter- und Obersumme so an, dass Sie damit die Flächeninhalte folgender Flächen berechnen können und berechnen Sie diese. Die Funktion ist immer $f(x) = x^2$.

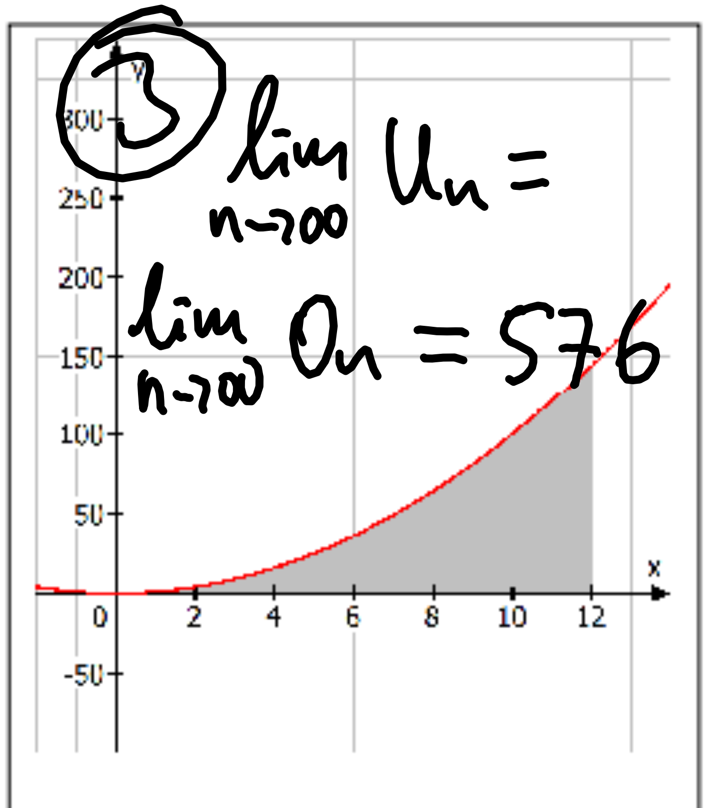
1



2



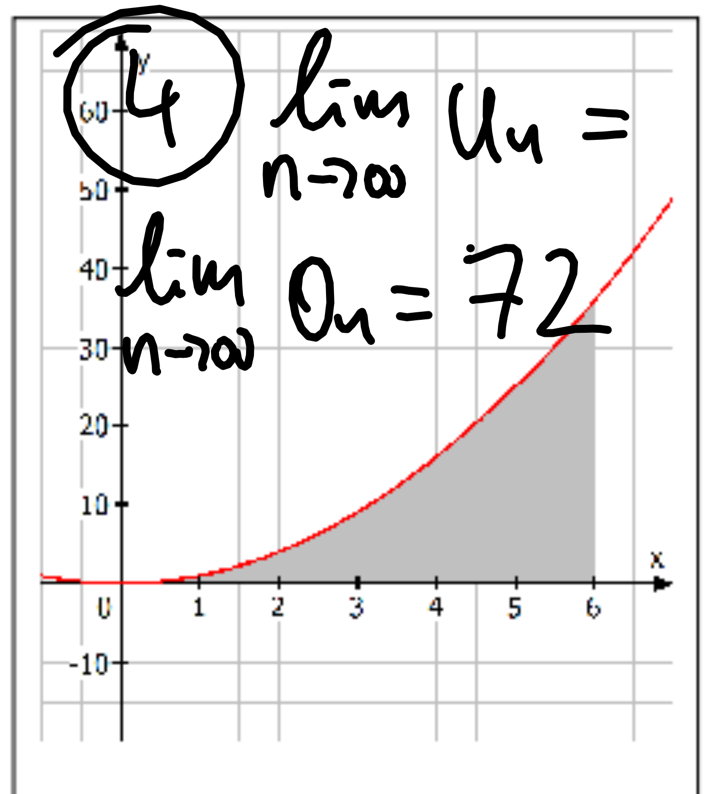
3



$\lim\limits_{n\to\infty} U_n =$

$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = 576$

4



$\lim\limits_{n\to\infty} U_n =$

$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = 72$

$f(x) := x^2$ definieren

1

$$U_n := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{4}{n}\right)\right)$$

$$O_n := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{4}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \quad = \frac{64}{3} = 21,\overline{3}$$

2

$$U_n := \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{5}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{5}{n}\right)\right)$$

$$O_n := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{5}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{5}{n}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{125}{3}$$

$$= 41,\overline{6}$$

Aufgabe 4:

Welches Muster können Sie bei der Berechnung der insgesamt 5 Flächeninhalte erkennen. Versuchen Sie, das Muster mit eigenen Worten zu beschreiben.

Wichtig!

Für Unter- und Obersummen

1. Funktion definieren   z.B $f(x) := x^2$

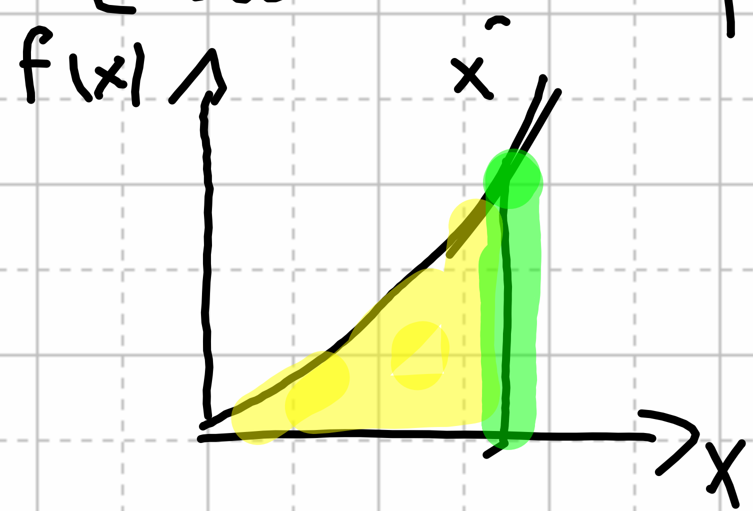
2. Untersumme als Funktion von n definieren

$$u(n) := \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\quad}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{\quad}{n}\right)\right)$$

Obersumme genauso $\quad O(n) := \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\quad}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{\quad}{n}\right)\right)$

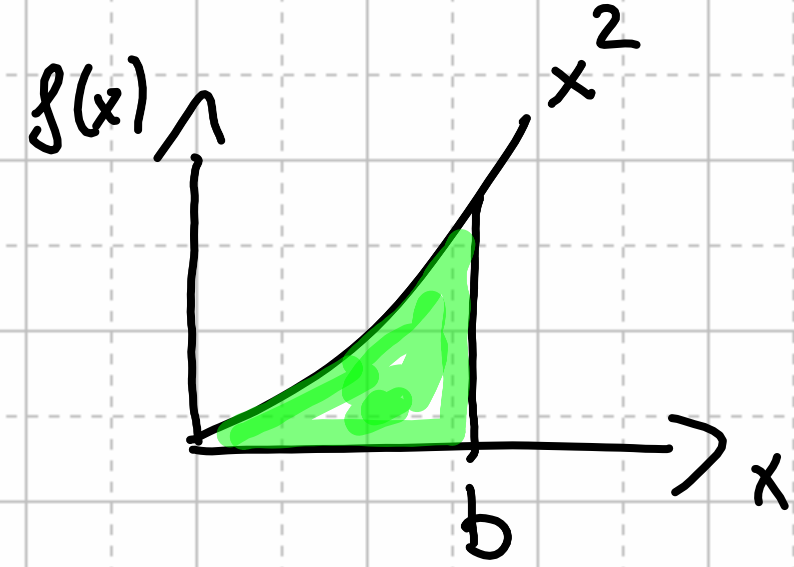
3. Grenzwert mit $\lim\limits_{n\to\infty} u(n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} o(n)$ berechnen!

Zusammenfassung



rechte Grenze	exakter Flächeninhalt $\left(\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n\right)$
3	$9 = \frac{3^3}{3}$
4	$\frac{64}{3} = \frac{4^3}{3}$
5	$\frac{125}{3} = \frac{5^3}{3}$
6	$72 = \frac{6^3}{3}$
12	$576 = \frac{12^3}{3}$
21	$3087 = \frac{21^3}{3}$
b	$\frac{b^3}{3}$

Vermutung



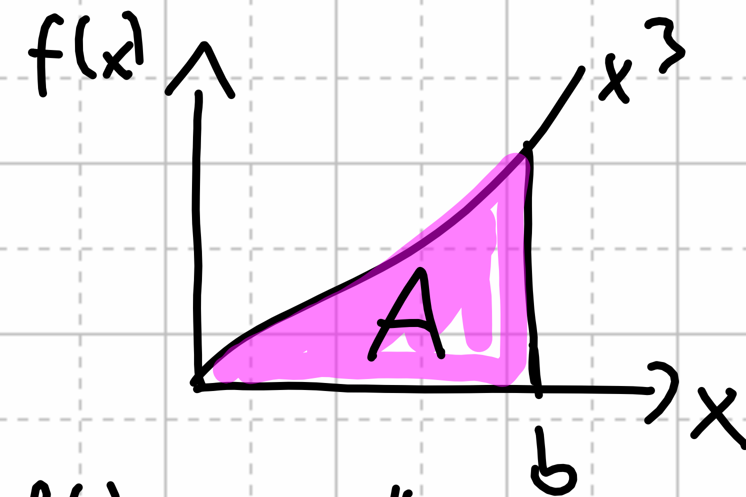
Die grün markierte Fläche, die unten von der x-Achse, links oben von dem Graphen der Normalparabel und rechts von der Senkrechten durch b, $b>0$, begrenzt wird, hat den Flächeninhalt $\frac{b^3}{3}$.

Beweis: $f(x)=x^2$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\cdot f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)\right) = \frac{b^3}{3}$

✓

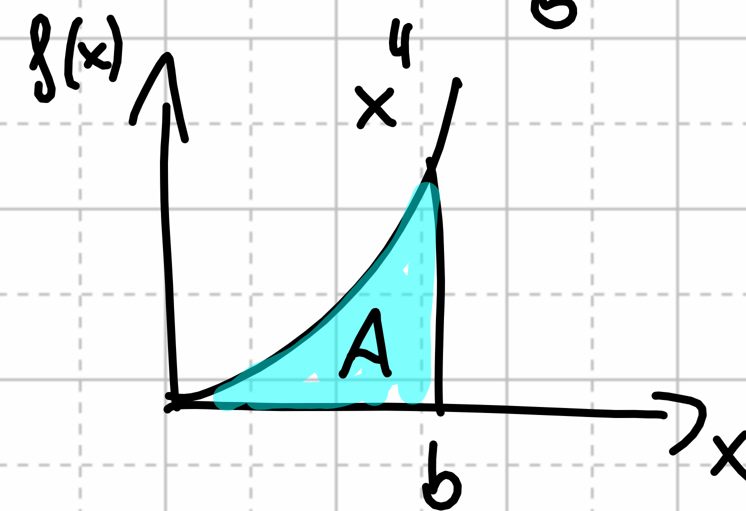
Frage: Wie sieht das bei anderen Funktionen aus?

a) $f(x) = x^3$



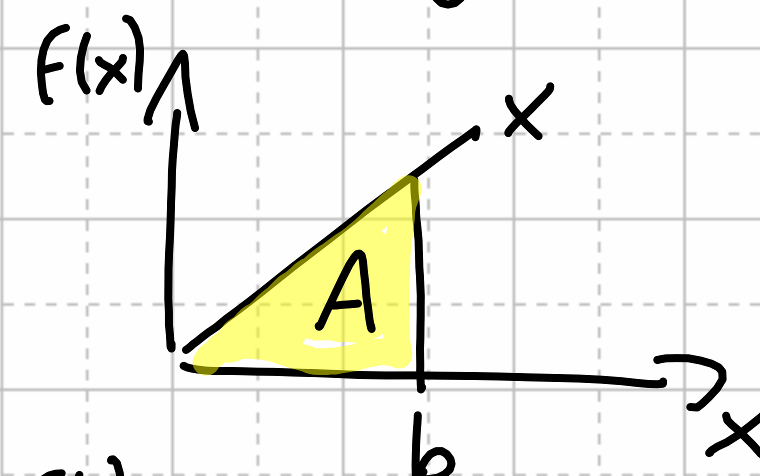
$A = \frac{b^4}{4}$

b) $f(x) = x^4$



$A = \frac{b^5}{5}$

c) $f(x) = x^1$



$A = \frac{b^2}{2}$

d) $f(x) = c$