f(x)	Exakter Flächeninhalt A
a) $f(x) = x^3 + x^2$	$0{,}25 \cdot b^3 \cdot (b + \frac{4}{3})$
b) $f(x) = x^5 + x^3$	$0{,}1\overline{6} \cdot b^4 \cdot (b^2 + 1{,}5)$
c) $f(x) = 2x^3 + x$	$0{,}5 \cdot b^2 \cdot (b^2 + 1)$
d) $f(x) = 5x^2 + 3x$	$1{,}\overline{6} \cdot b^2 \cdot (b + 0{,}9)$
e) $f(x) = x^6 + 2x^4$	$0{,}14 \cdot b^5 \cdot (b^2 + 2{,}8)$
f) $f(x) = 6x^3 + 2x^4$	$0{,}4 \cdot b^4 \cdot (b + 3{,}75)$
g) $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$	$b^3 \cdot (b^2 + b + 1)$

$\rightarrow \frac{b^4}{4} + \frac{b^3}{3}$

$\rightarrow \frac{b^6}{6} + \frac{b^4}{4}$

$\rightarrow \frac{b^4}{2} + \frac{b^2}{2}$

$\rightarrow \frac{5b^3}{3} + \frac{3b^2}{2}$

$\rightarrow \frac{b^7}{7} + \frac{b^5}{2}$

$\rightarrow \frac{2b^5}{5} + \frac{3b^4}{2}$

$\rightarrow b^5 + b^4 + b^3$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$

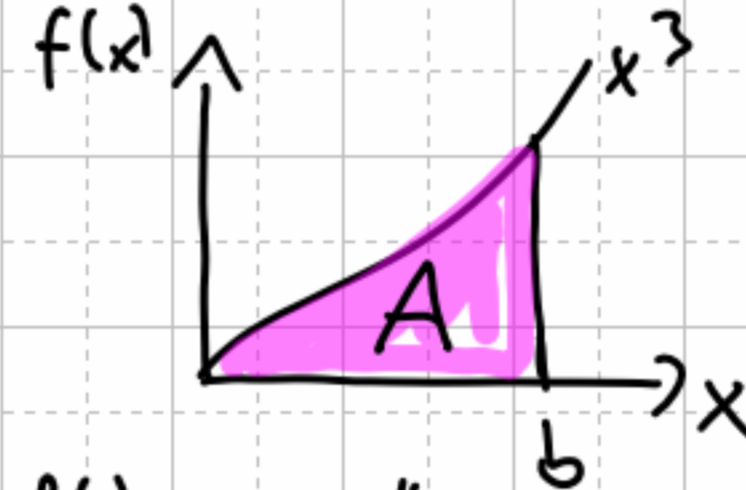
Zusammenfassung

f(x)	A
$x^3 + x^2$	$\frac{b^4}{4} + \frac{b^3}{3}$
$x^5 + x^3$	$\frac{b^6}{6} + \frac{b^4}{4}$
$2x^3 + x^1$	$\frac{b^4}{2} + \frac{b^2}{2}$

f(x)	A
$5x^2 + 3x$	$\frac{5b^3}{3} + \frac{3b^2}{2}$
$6x^3 + 2x^4$	$\frac{6b^4}{4} + \frac{2b^5}{5}$
$3x^2 + 4x^3 + 5x^4$	$b^3 + b^4 + b^5$

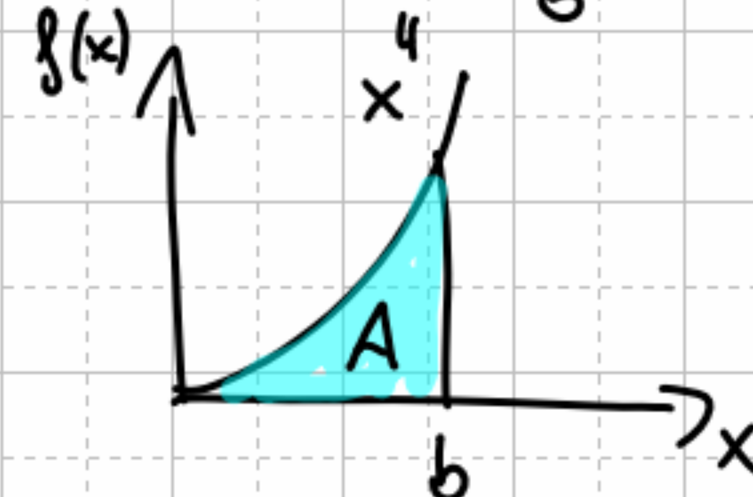
Frage: Wie sieht das bei anderen Funktionen aus?

a) $f(x) = x^3$



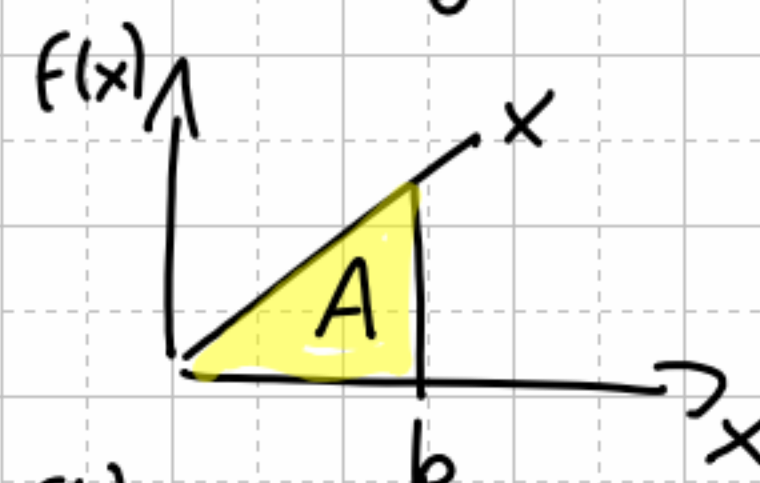
$A = \frac{b^4}{4}$

b) $f(x) = x^4$



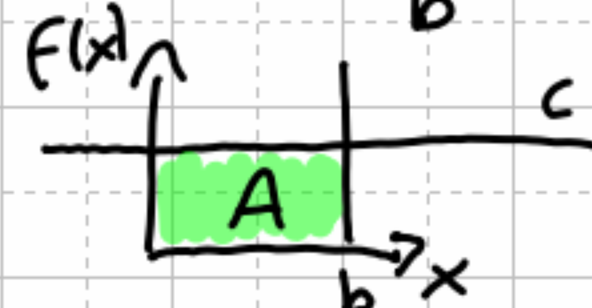
$A = \frac{b^5}{5}$

c) $f(x) = x^1$



$A = \frac{b^2}{2}$

d) $f(x) = c$



$A = c \cdot b$

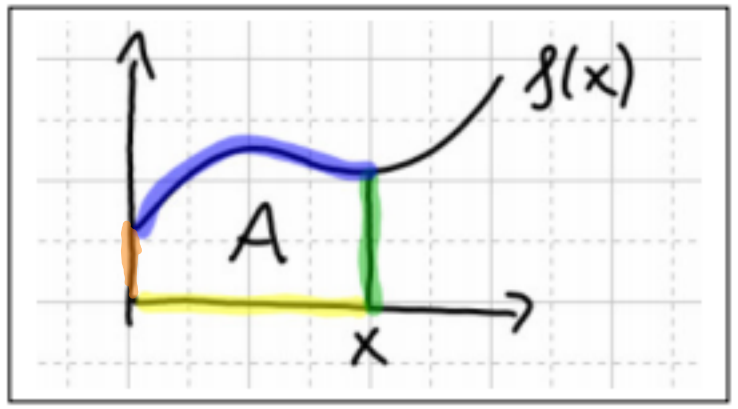
Erinnerung: Ableitungen

$$f(x) = a \cdot x^n \Longrightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Flächeninhaltsfunktion

Für den Flächeninhalt A einer Fläche zwischen der x-Achse, dem Graphen einer Funktion f(x) und einer Senkrechten durch x, mit x>0 gilt die Flächeninhaltsfunktion A(x). Der Flächeninhalt hängt nur von der Lage von x ab, also ist x in dieser Funktion die Variable von der der Flächeninhalt abhängt.

Voraussetzung ist die Stetigkeit von f(x) im Intervall [0;x] und die Nichtnegativität von f(x) für alle $x \in [0;x]$. Anschaulich heißt das, der Graph von f(x) im betreffenden Bereich nicht unterhalb der x-Achse verläuft.



Offenbar gilt der Zusammenhang $A'(x) = f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (vorläufig)

Für eine im Intervall [a;b]definierte, stetige Funktion f, deren Funktionswerte dort nicht negativ sind, ist die zugehörende Flächeninhaltsfunktion A in [a;b] differenzierbar, wobei die Ableitung von A mit f übereinstimmt:

$A'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a;b]$

Definition Stammfunktion (Buch S. 359)

Gilt für ein Intervall [a;b] aus dem Definitionsbereich$\mathbb{D}$(f) und zwei Funktionen f und F für alle $x \in [a;b]$ **$F'(x) = f(x)$** so nennt man **F** eine **Stammfunktion von f**.

Erinnerung: Eine Flächeninhaltsfunktion A(x) ist eine Stammfunktion von f(x), da $A'(x) = f(x)$, aber nicht jede Stammfunktion ist eine Flächeninhaltsfunktion, da nicht immer der Flächeninhalt angegeben wird.

Für ein Intervall [a;b] existieren unendlich viele Stammfunktionen F(x) für eine Funktion f(x) und es gilt: f(x) hat eine Stammfunktion der Form $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Man nennt c eine additive Konstante.

Stammfunktion mit CAS:

Beispiele für Flächeninhaltsfunktionen

1) $f(x) = x^2 \Longrightarrow A(x) = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot x^3$

Es gilt: $A'(x) = \underbrace{3 \cdot \frac{1}{3}}_{=1} \cdot x^2 = x^2 = f(x)$

2) $f(x) = x^4 \Rightarrow A(x) = \frac{x^5}{5} = \frac{1}{5} \cdot x^5$

Es gilt: $A'(x) = \underbrace{5 \cdot \frac{1}{5}}_{=1} x^4 = x^4 = f(x)$

3) $f(x) = 6 \cdot x^3 \Longrightarrow A(x) = \frac{6x^4}{4} = \frac{6}{4} \cdot x^4 = \frac{3}{2} \cdot x^4$

Es gilt: $A'(x) = \frac{6}{4} \cdot 4 \cdot x^3 = 6x^3 = f(x)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (vorläufig)

Für eine im Intervall [a;b]definierte, stetige Funktion f, deren Funktionswerte dort nicht negativ sind, ist die zugehörende Flächeninhaltsfunktion A in [a;b] differenzierbar, wobei die Ableitung von A mit f übereinstimmt:

$A'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a;b]$

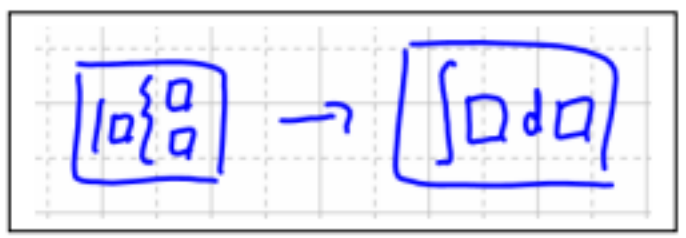
Definition Stammfunktion (Buch S. 359)

Gilt für ein Intervall [a;b] aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}(f)$ und zwei Funktionen f und F für alle $x \in [a;b]$ **$F'(x) = f(x)$** so nennt man **F** eine **Stammfunktion von f**.

Erinnerung: Eine Flächeninhaltsfunktion A(x) ist eine Stammfunktion von f(x), da A'(x) = f(x), aber nicht jede Stammfunktion ist eine Flächeninhaltsfunktion, da nicht immer der Flächeninhalt angegeben wird.

Für ein Intervall [a;b] existieren unendlich viele Stammfunktionen F(x) für eine Funktion f(x) und es gilt: f(x) hat eine Stammfunktion der Form $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Man nennt c eine additive Konstante.

Stammfunktion mit CAS:



$$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow F'(x) = x^2 = f(x)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 1 \Rightarrow F'(x) = x^2 = f(x)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 263 \Rightarrow F'(x) = x^2 = f(x)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 4523 \Rightarrow F'(x) = x^2 = f(x)$$

Übungen Bestimmen Sie Stammfunktion von $f(x)$ (CAS als Kontrolle)

1) $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ $\qquad F(x) = x^3 + x^5$ $\qquad$ CAS $\int 3x^2+5x^4\,dx$

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x + 4$ $\qquad F(x) = \frac{1}{12}x^6 + x^2 + 4x$

3) $f(x) = 6x + 3x^3$

4) $f(x) = e^x + 4$

5) $f(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - 3x^2$ $\qquad F(x) = \frac{1}{18}x^6 + 0{,}4x^5 - x^3$

6) $f(x) = 100x^{99} + 52x^{51} + 3x^2$

7) $f(x) = \pi \cdot x + 3x^4$

8) $f(x) = 4x^5 + \frac{2}{3}x^6$

9) $f(x) = 27x^2 + 16x^3 + 20x^4$