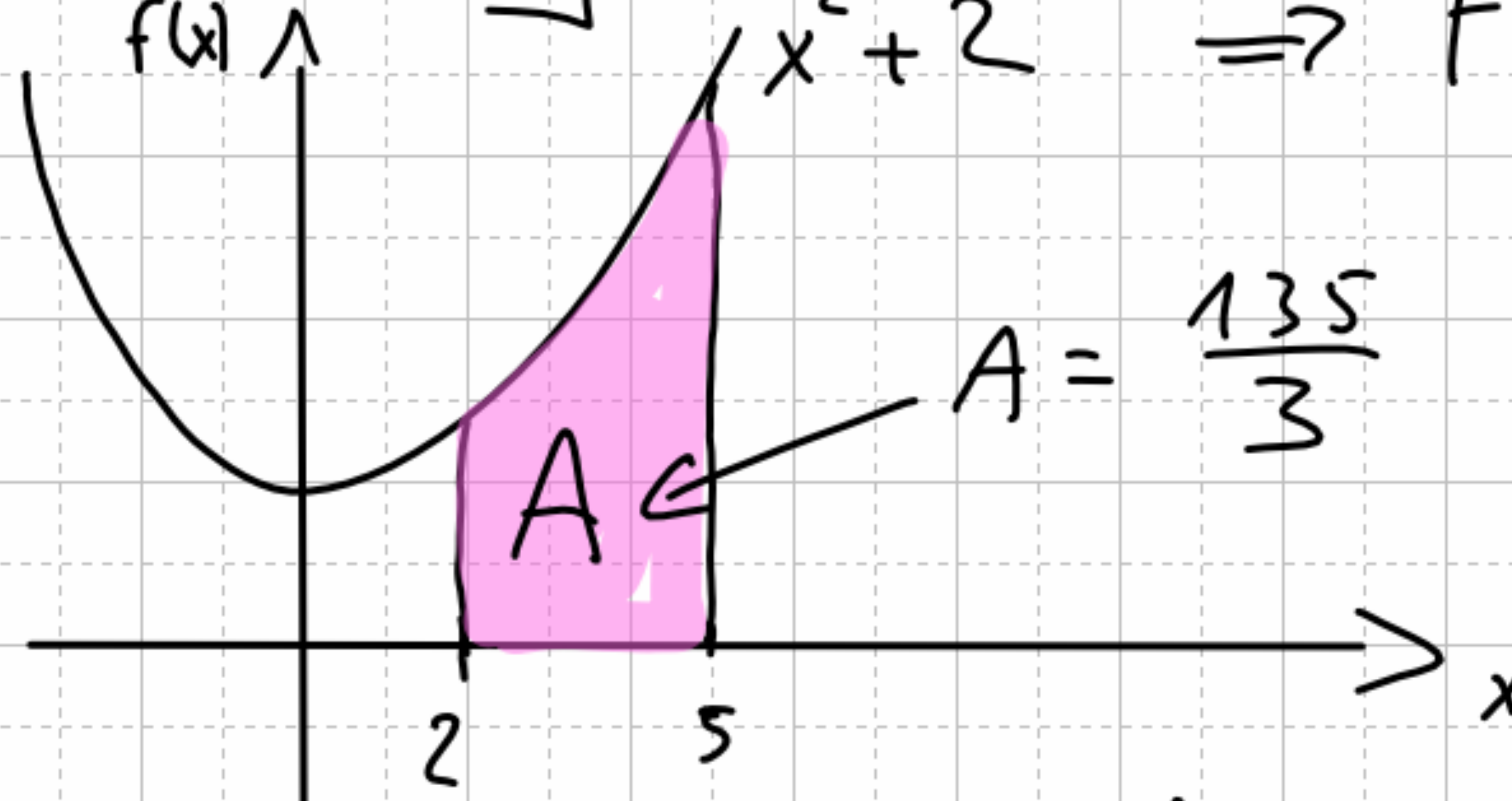
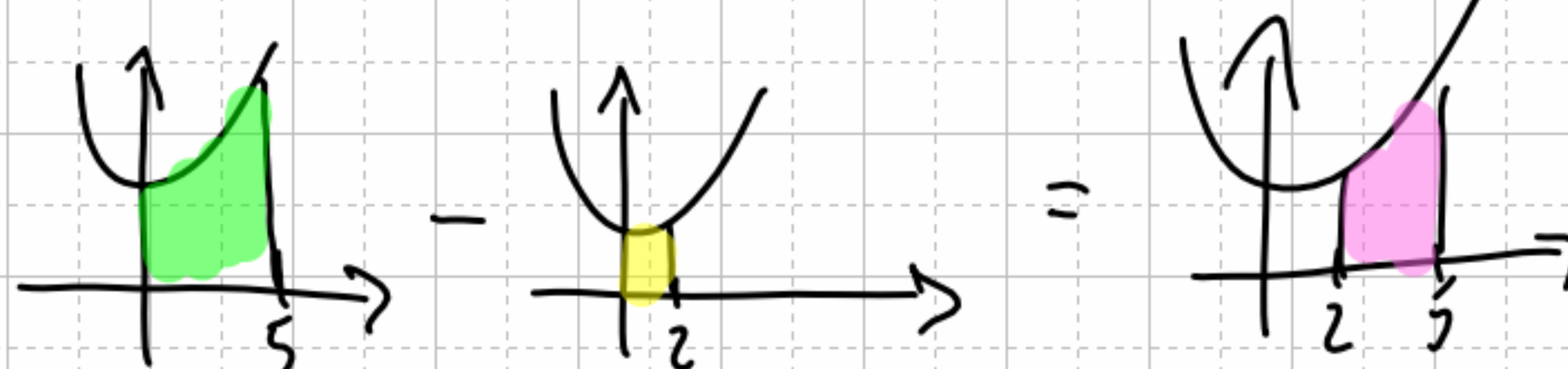
Neue Problemstellung

$$x^2+2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$$



$$A = \frac{135}{3}$$

Vorschlag:



$$F(5) = \frac{5^3}{3} + 2\cdot 5 = \frac{155}{3}$$

$$F(2) = \frac{2^3}{3} + 2\cdot 2 = \frac{20}{3}$$

$$F(5) - F(2) = \frac{155}{3} - \frac{20}{3} = \frac{135}{3}$$

Stammfunktionen:

Wenn zwei Funktionen f(x) und F(x) in einem Intervall [a;b] definiert sind und dort für alle x ∈ [a;b] die Gleichung F'(x) = f(x) gilt, so heißt **F eine Stammfunktion von f** im Intervall [a;b].

Falls in dem Intervall [a;b] alle Funktionswerte nicht negativ sind, so ist die Flächeninhaltsfunktion A eine Stammfunktion von f.

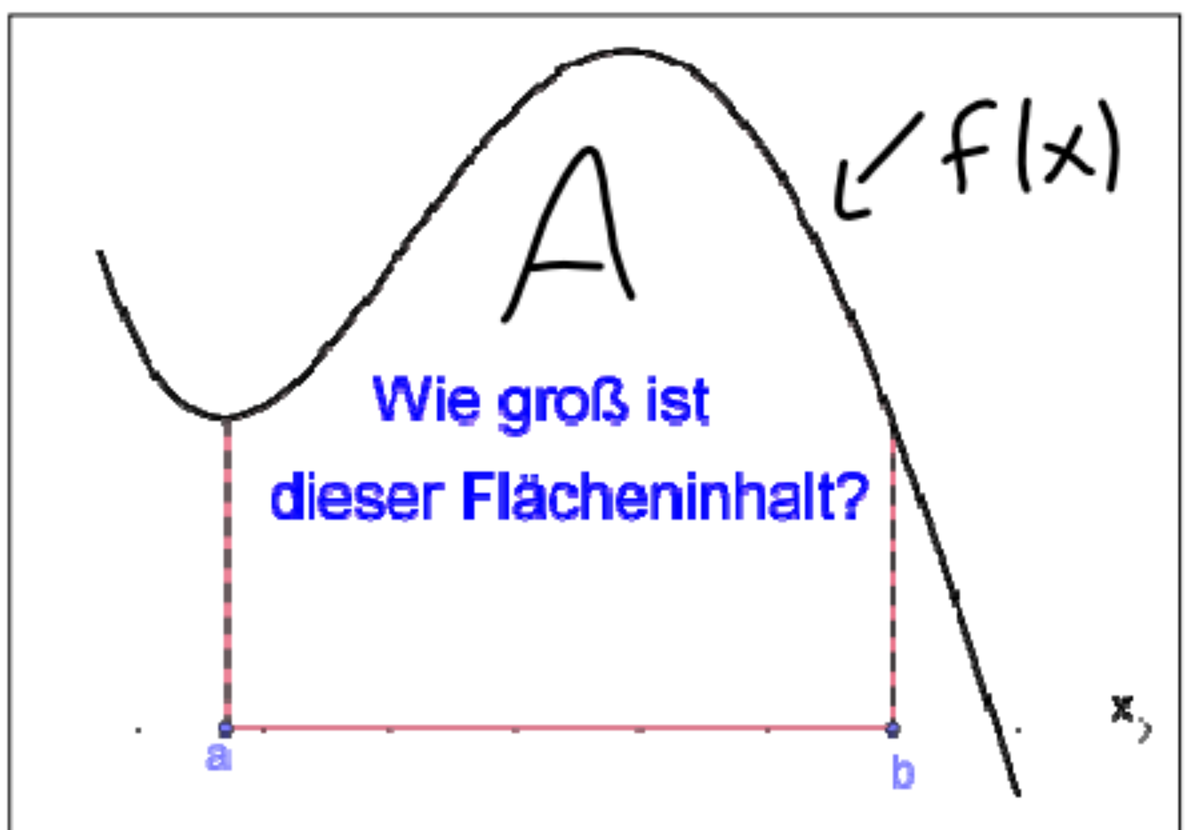
Anmerkung: Da Zahlen beim Ableiten wegfallen, gibt es unendlich viele Stammfunktionen F zu einer Funktion f.

Beispiel: Für f(x) = 2x ist F(x) = x^2 eine Stammfunktion, da F'(x) = 2x = f(x) gilt.
Aber $F_4(x) = x^2 + 4$ oder $F_6(x) = x^2 + 6$ oder $F_{-3}(x) = x^2 - 3$ sind auch Stammfunktionen, da die Ableitungen aller Funktionen mit f(x) identisch sind.

Anwendung von Stammfunktionen

Für eine Funktion f(x) kann der Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f(x) in den Grenzen a und b (siehe Skizze unten) berechnet werden, indem man eine Stammfunktion bildet, die Grenzen b und a in die Stammfunktion einsetzt und die Ergebnisse voneinander subtrahiert.

Schreibweise: $A = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$



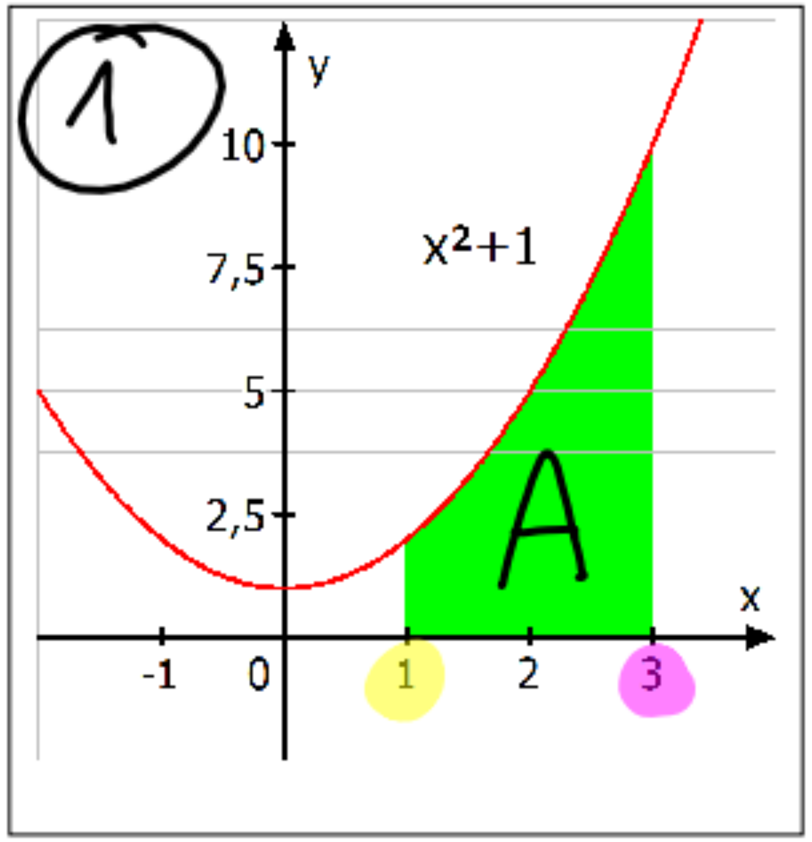
WG Y12, MC4
31.01.22

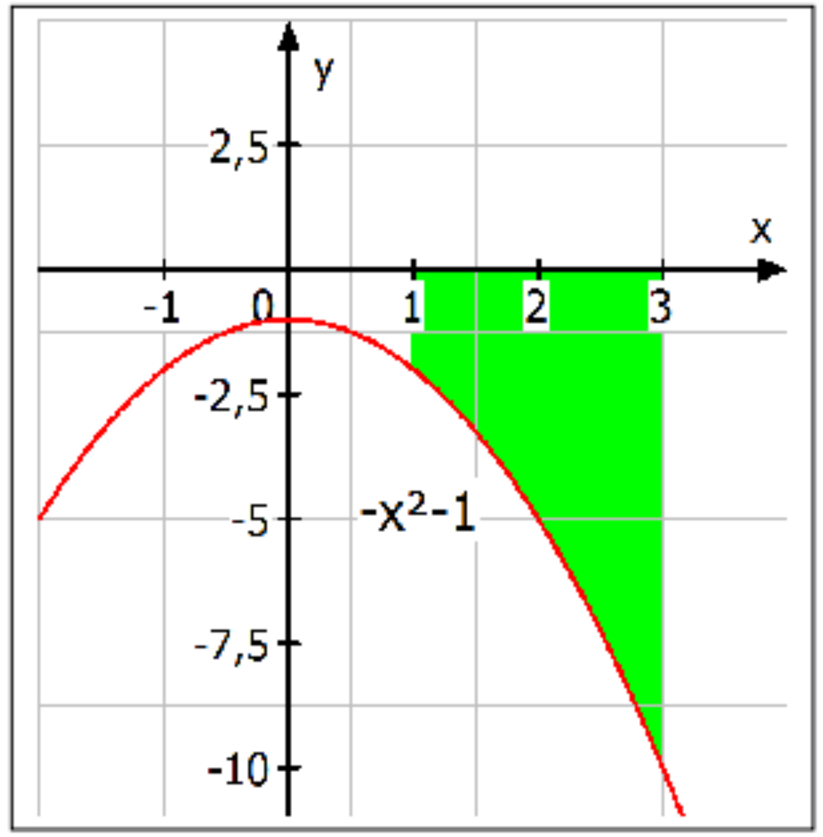
$$A = F(x)\Big|_a^b$$

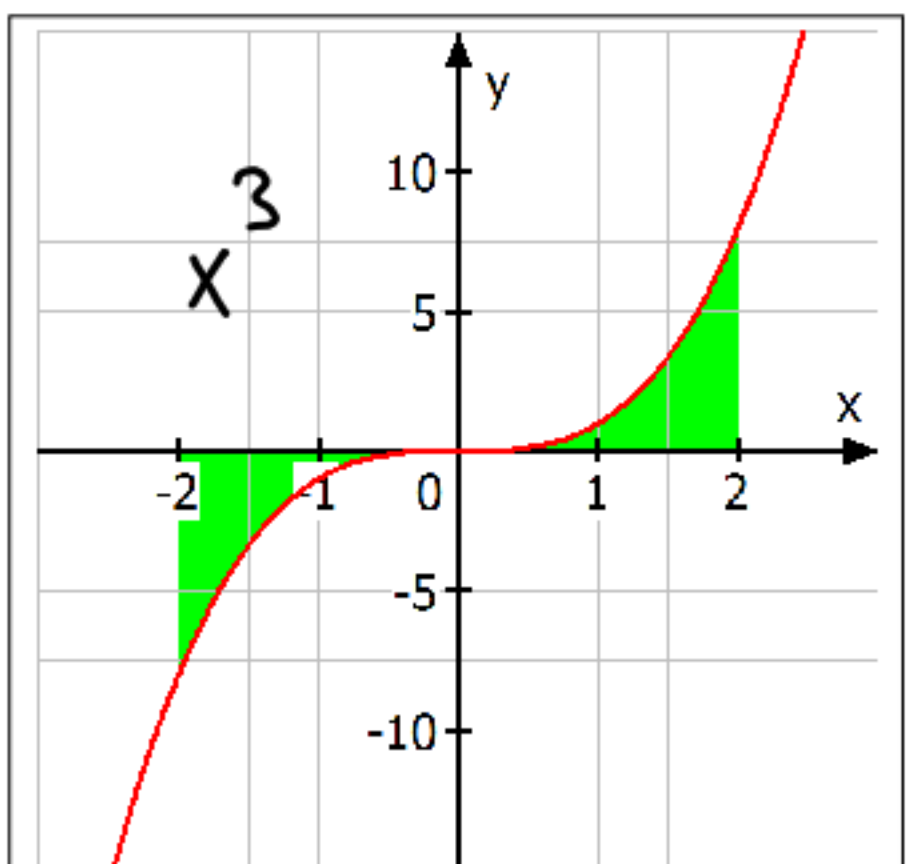
$$= F(b) - F(a)$$

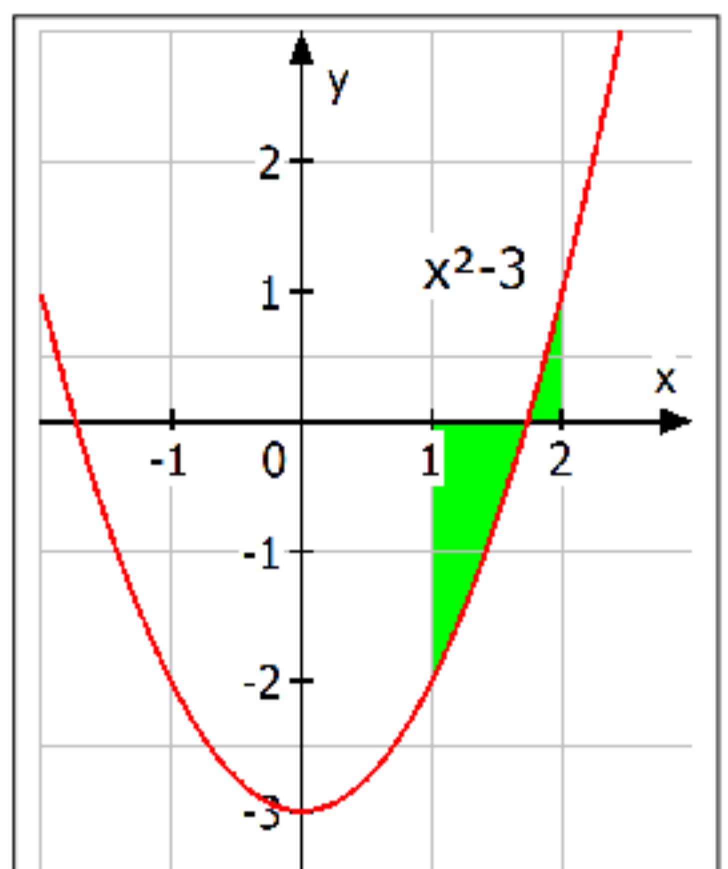
Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Flächeninhalt der markierten Fläche mit den bisher bekannten Methoden und der neuen Schreibweise!









Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt!

1 Neue Schreibweise

$f(x) = x^2 + 1$

$$A = \underbrace{\frac{x^3}{3} + x}_{F(x)} \Big|_1^3 = F(3) - F(1)$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right)$$

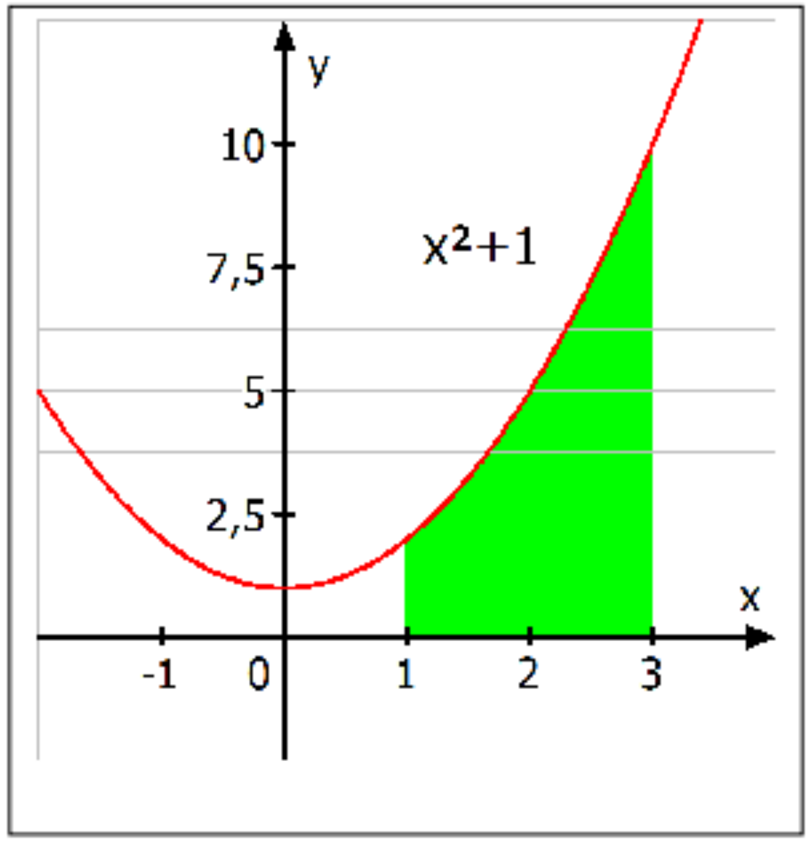
$$= 12 - \frac{4}{3}$$

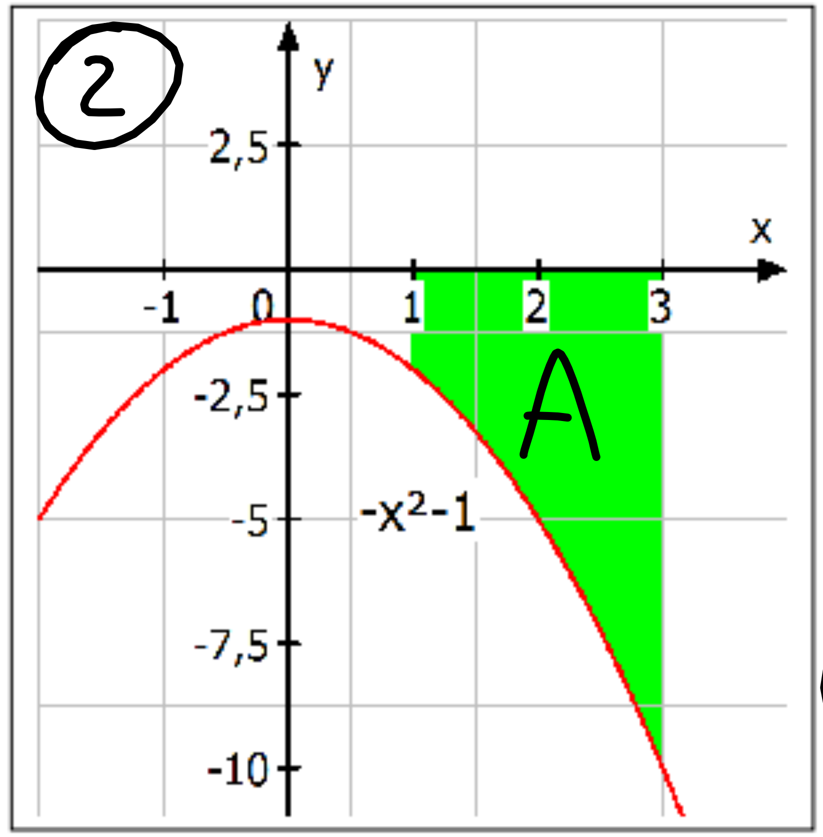
$$= \frac{32}{3} \approx 10{,}\overline{6}$$

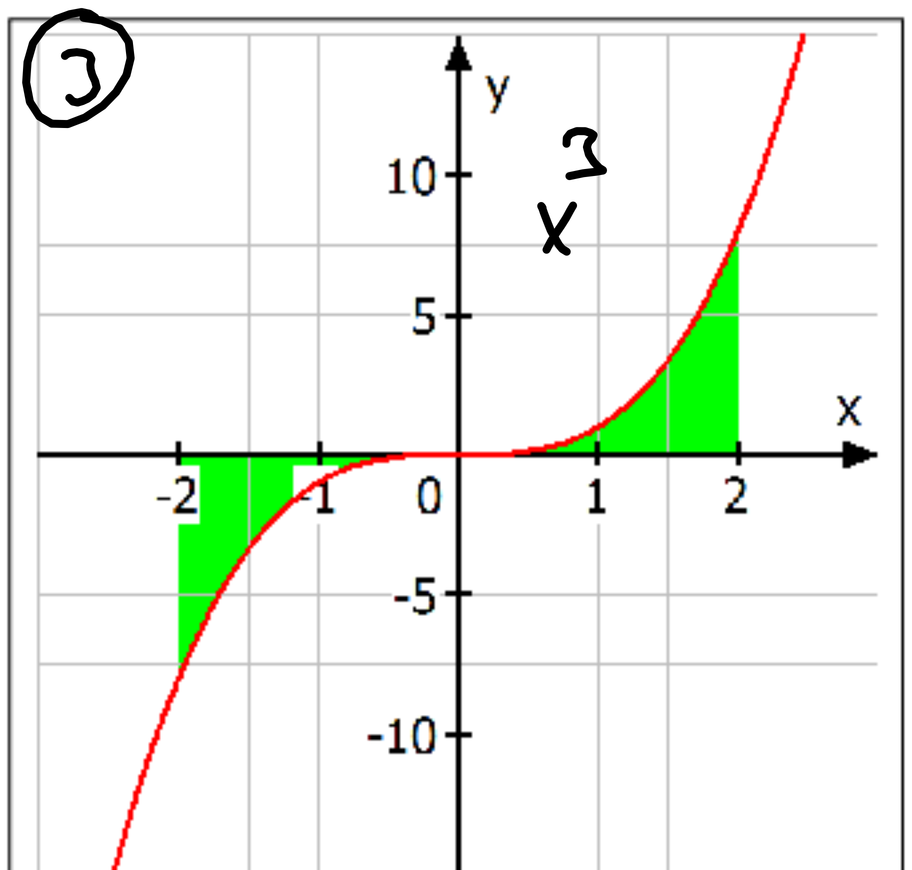
CAS: $f(x) := x^2 + 1$

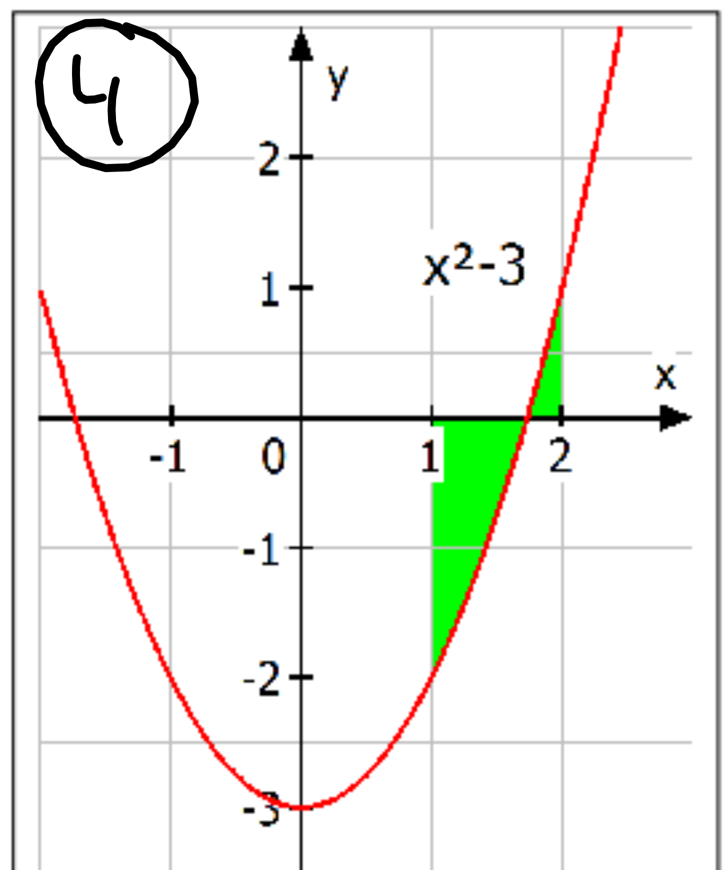
$sf(x) := \int f(x)\,dx$

$sf(3) - sf(1) =$









② $A = \underbrace{\frac{-x^3}{3} - x}_{F(x)} \Big|_1^3 = F(3) - F(1)$

$= -12 - \left(-\frac{4}{3}\right)$

$= -10,\overline{6} = \underline{\underline{-\frac{32}{3}}}$

③ $A = \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{F(x)} \Big|_{-2}^{2} = F(2) - F(-2)$

$= 4 - 4 = \underline{\underline{0}}$

④ $A = \underbrace{\frac{x^3}{3} - 3x}_{F(x)} \Big|_1^2 = F(2) - F(1)$

$= -3,\overline{3} - (-2,\overline{6})$

$= -0,\overline{6} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt!

E-Mail: carsten.vooren@bkcr.info

Beobachtungen / Vermutungen

(2) A ist genauso groß wie die Fläche in Aufgabe 1, aber da der Graph und damit die Fläche vollständig unterhalb der x-Achse ist, ist das Ergebnis rechnerisch negativ.

(3) Die Flächen unterhalb der x-Achse (von -2 bis 0) und oberhalb der x-Achse (von 0 bis 2) sind wegen der Punktsymmetrie von $f(x)=x^3$ gleich groß und ergänzen sich rechnerisch zu 0. Tatsächlicher Flächeninhalt ist vermutlich 8.

(4) Der Teil der Fläche, der unterhalb der x-Achse ist, ist größer als der Teil, der oberhalb der x-Achse ist, daher ergänzen sich die beiden zu einem negativen Flächeninhalt.

Stammfunktionen:

Wenn zwei Funktionen f(x) und F(x) in einem Intervall [a;b] definiert sind und dort für alle x ∈ [a;b] die Gleichung F'(x) = f(x) gilt, so heißt **F eine Stammfunktion von f** im Intervall [a;b].

Falls in dem Intervall [a;b] alle Funktionswerte nicht negativ sind, so ist die Flächeninhaltsfunktion A eine Stammfunktion von f.

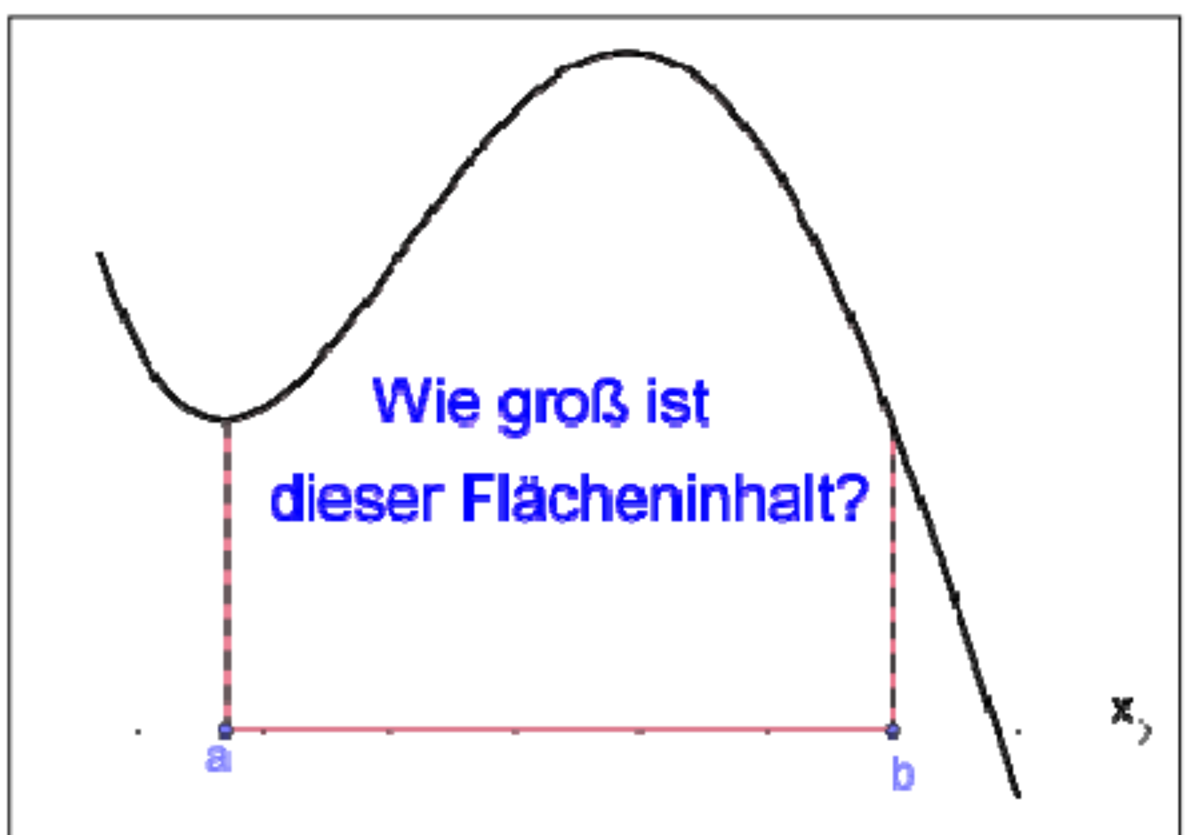
Anmerkung: Da Zahlen beim Ableiten wegfallen, gibt es unendlich viele Stammfunktionen F zu einer Funktion f.

Beispiel: Für f(x) = 2x ist F(x) = x^2 eine Stammfunktion, da F'(x) = 2x = f(x) gilt.
Aber $F_4(x) = x^2 + 4$ oder $F_6(x) = x^2 + 6$ oder $F_{-3}(x) = x^2 - 3$ sind auch Stammfunktionen, da die Ableitungen aller Funktionen mit f(x) identisch sind.

Anwendung von Stammfunktionen

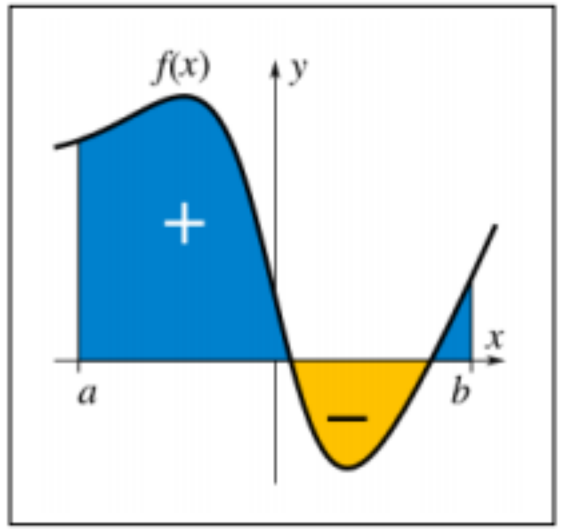
Für eine Funktion f(x) kann der Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f(x) in den Grenzen a und b (siehe Skizze unten) berechnet werden, indem man eine Stammfunktion bildet, die Grenzen b und a in die Stammfunktion einsetzt und die Ergebnisse voneinander subtrahiert.

Schreibweise: $A = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$



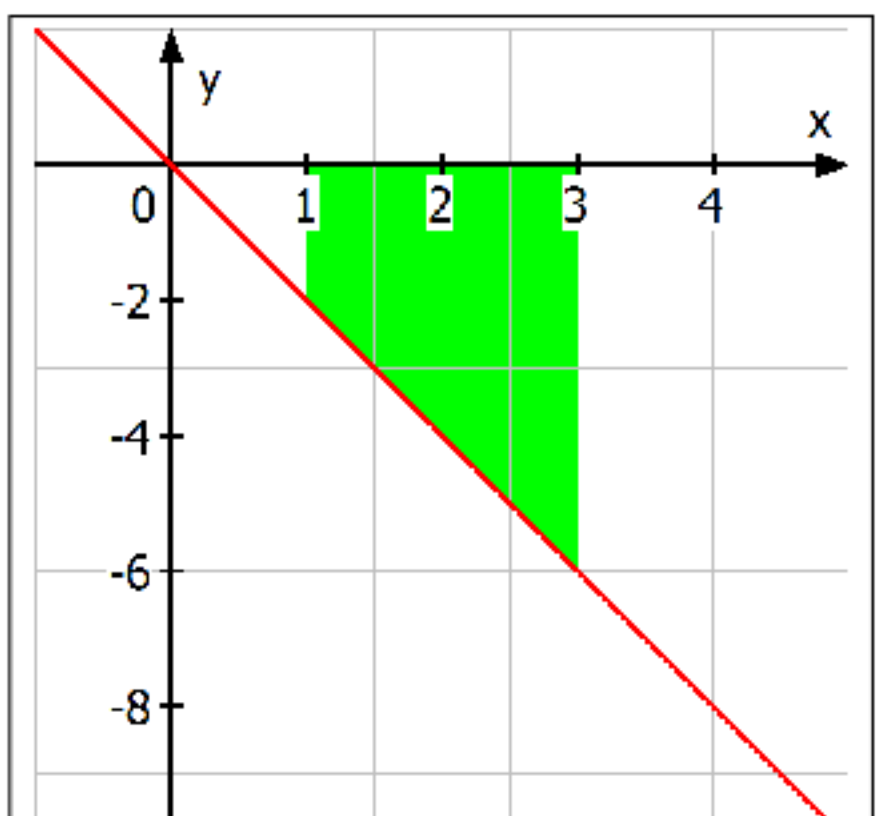
Diese Rechnung ergibt genau den Flächeninhalt, wenn die Fläche vollständig oberhalb der x-

Flächen, die sich vollständig oberhalb der x-Achse befinden, nennt man **positiv orientierte Flächen**.
Flächen, die sich vollständig unterhalb der x-Achse befinden, nennt man **negativ orientierte Flächen**.



Rein rechnerisch ergibt das Vorgehen zur Berechnung des Flächeninhalts für die mit einem „-„ gekennzeichnete Fläche genau den Flächeninhalt, allerdings mit einem negativen Vorzeichen. In solchen Fällen verwendet man die Betragsstriche | A |.

Beispiel:



Rechnung:
$f(x) = -2x$
⇨ Stammfunktion $F(x) = -1 \cdot x^2$

Flächeninhalt:
$$|A| = \left|-1x^2\right|_1^3 = \left|-1\cdot 3^2 - (-1\cdot 1^2)\right| = |-9-(-1)| = |-8| = 8$$

Anmerkung: Wenn man schon weiß, dass der gesuchte Flächeninhalt einen negativen Wert ergibt, kann man sofort die Betragsstriche notieren.
Es ist aber auch kein Problem, sie nachträglich in der Rechnung einzuzeichnen.

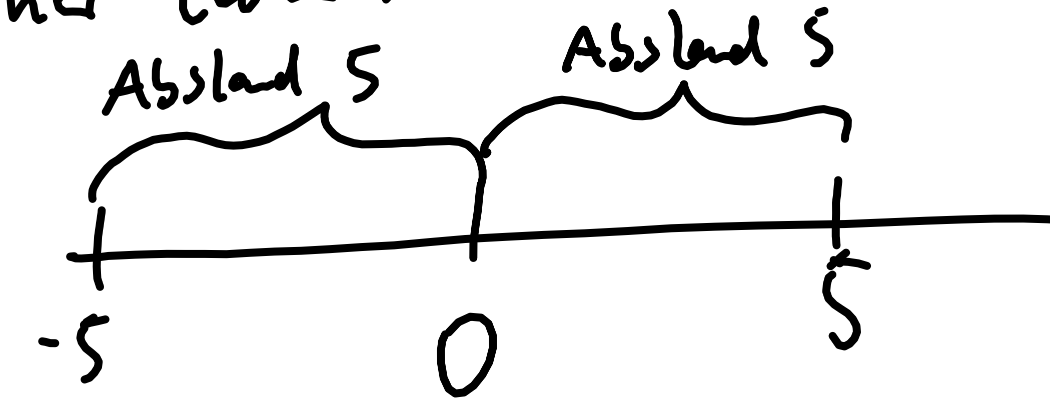
Der Betrag

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1\cdot x, & x < 0 \end{cases}$$

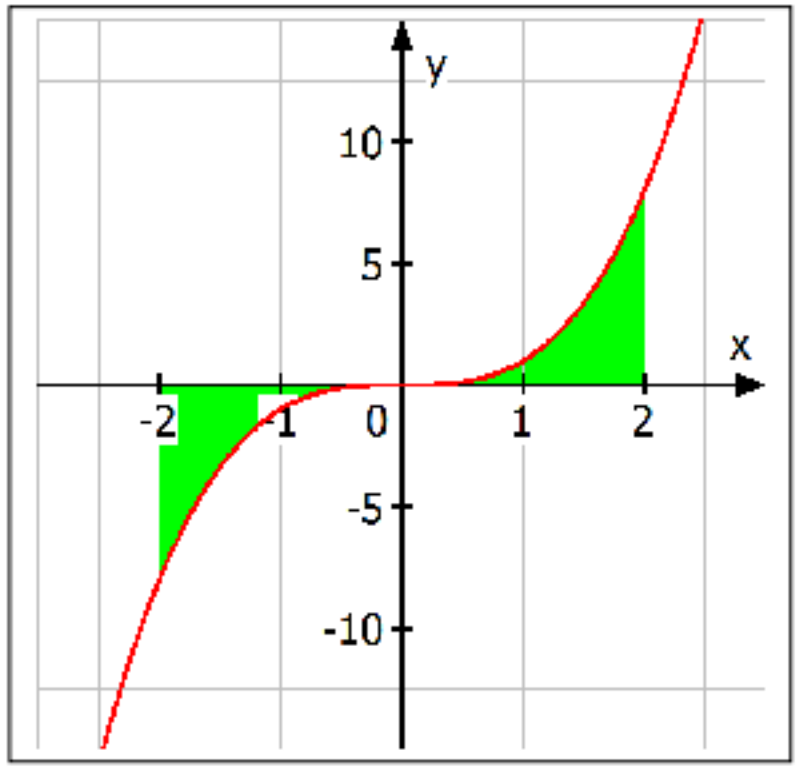
Bsp. $|5| = 5$, da $5 > 0$

$|-5| = -1\cdot(-5) = 5$, da $-5 < 0$

Anschaulich ist der Betrag von einer Zahl x ihr Abstand zur 0.



Der gesuchte Flächeninhalt kann mit A = F(b) – F(a) berechnet werden. Problematisch wird es wenn im Intervall zwischen a und b eine Nullstelle von f(x) ist und mindestens ein Funktionswert $f(x) < 0$ für ein $x \in [a;b]$ ist.



In diesem Fall gibt F(b) – F(a) nicht den tatsächlichen Flächeninhalt an, sondern die Summe der negativ und positiv orientierten Flächen. Sind diese zufällig gleich groß, so liefert die Rechnung einen Flächeninhalt von 0. Um den tatsächlichen Flächeninhalt zu ermitteln, muss man Flächeninhalte der negativ und positiv orientierten Flächen getrennt berechnen und addieren.

$\sum$ $\int$

Ab jetzt definieren wir das **Integral** der Funktion f(x) zwischen den Grenzen a und b als

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$\rightarrow$ $\boxed{\int_{\square}^{\square} \square \, d\square}$

Dabei ist F(x) eine Stammfunktion von f(x): d.h. F'(x) = f(x) für alle x ∈ [a;b].

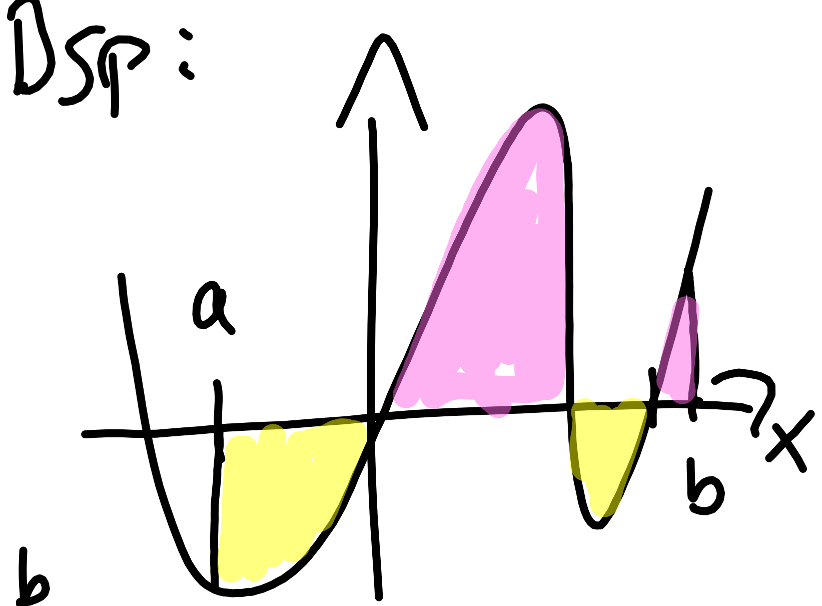
- f nennt man Integrandfunktion
- f(x) ist der Integrand
- x ist die Integrationsvariable
- a ist die untere Grenze des Integrals
- b ist die obere Grenze des Integrals

Hinweis: Wenn man beim Integral die Grenzen a und b weglässt, so erhält man das „unbestimmte Integral“, was einer Stammfunktion entspricht. Siehe CAS-Befehl zur Ermittlung von Stammfunktionen.

$\rightarrow$ $\boxed{\int \square \, d\square}$

Merkregel:
$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den Senkrechten durch a und b.

Bsp:



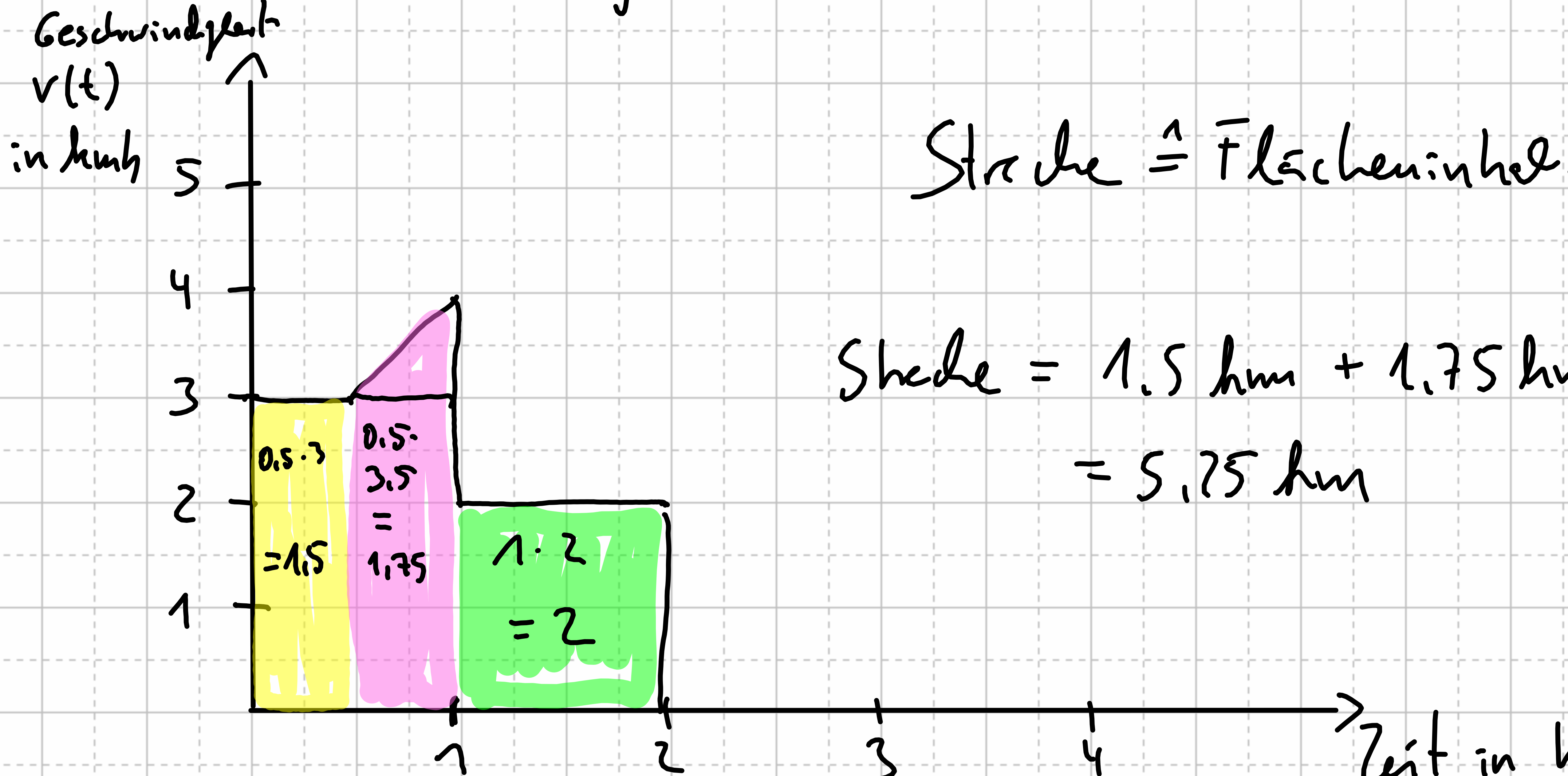
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Mit Hilfe von Integralen können unter anderem Flächeninhalte berechnet werden, wenn man ein paar Regeln beachtet, außerdem Volumina, Besucherzahlen, Steuern, Strecken und vieles mehr.

Ein paar Übungen aus dem Buch:

- Seite 368, Nr. 1, 2, 3
- Seite 369, Nr. 4, 8 und 9
- Seite 393, Nr. 14
- Seite 382, Nr. 19 f

Bsp. für Streckenberechnung (Weg)



Strecke $\hat{=}$ Flächeneinheit

Strecke = 1,5 km + 1,75 km + 2 km

= 5,25 km

HA: Strecke mit Integralrechnung!