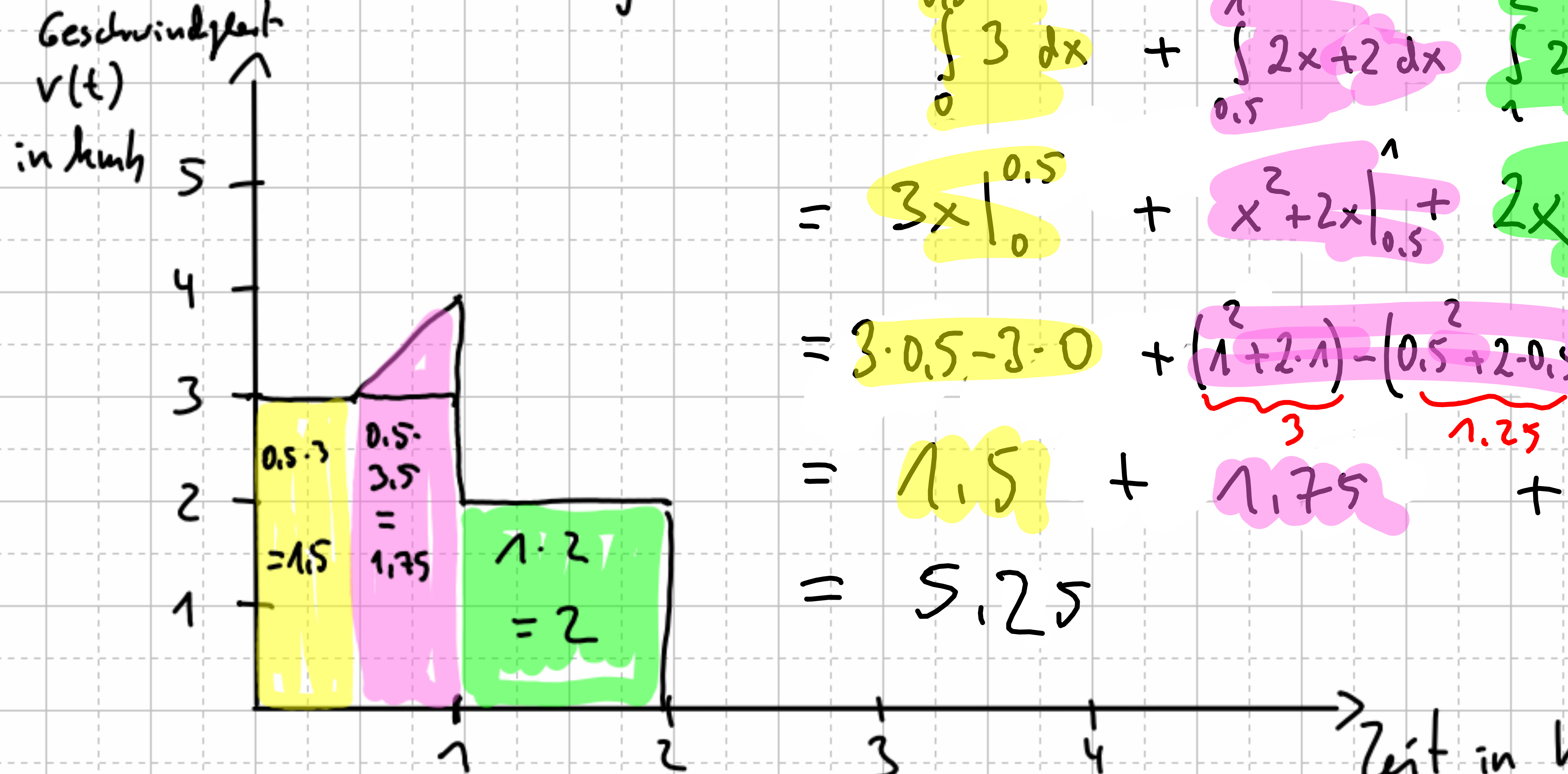
Bsp. für Streckenberechnung (Weg) mit Integralen



$$\int_0^{0,5} 3\,dx + \int_{0,5}^{1} 2x+2\,dx \quad \int_1^2 2\,dx$$

$$= 3x\Big|_0^{0,5} + x^2+2x\Big|_{0,5}^{1} + 2x\Big|_1^2$$

$$= 3\cdot 0{,}5 - 3\cdot 0 + \underbrace{(1^2+2\cdot 1)}_{3} - \underbrace{(0{,}5^2+2\cdot 0{,}5)}_{1{,}25} + 2\cdot 2 - 2\cdot 1$$

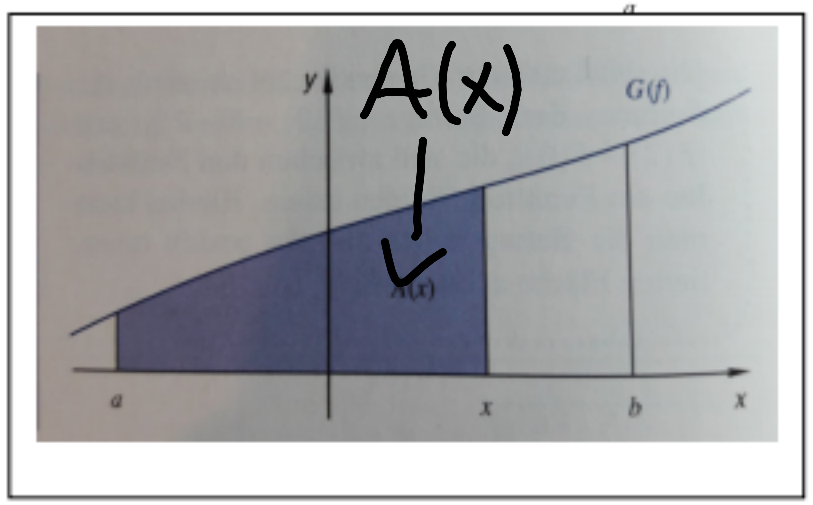
$$= 1{,}5 + 1{,}75 + 2$$

$$= 5{,}25$$

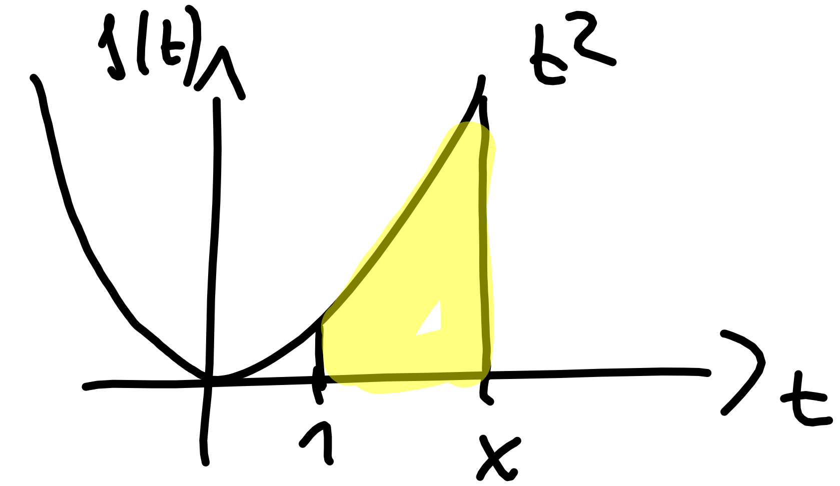
HA: Strecke mit Integralrechnung!

Integralfunktion

Unter der Integralfunktion einer zwischen den Grenzen a und b integrierbaren Funktion f versteht man die Funktion mit I_a mit $I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ für x ∈ [a;b].



Bsp



$$I_1(x) := \int_1^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^x = \left(\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$I_1(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$I_1(4) = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

Fallunterscheidung: Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse und den Senkrechten durch a und x ist

- vollständig oberhalb der x-Achse => $I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ergibt den Flächeninhalt dieser Fläche.
- vollständig unterhalb der x-Achse => $I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ergibt den negativen Flächeninhalt dieser Fläche => Betragsstriche verwenden, falls die Fläche berechnet werden soll
- zum Teil oberhalb und zum Teil unterhalb der x-Achse => $I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ergibt die Summe der orientierten Flächeninhalte aller Teilflächen. Wenn die positiv und negativ orientierten Flächen insgesamt gleich groß sind, ergibt $I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ den Wert 0.

Anmerkung: Jede Integralfunktion einer Funktion f ist auch eine Stammfunktion von F. (Vgl. Buch Seite 364) Das bedeutet letztendlich $I_a'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

Diese Gleichung lässt sich zusammenfassen zu der Aussage:

Differenzieren und Integrieren sind einander entgegengesetzte Rechenoperationen

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist f eine integrierbare Funktion auf dem Intervall $[a;b] \subset \mathbb{R}$, so ist für alle $x_0 \in [a;b]$ die Funktion F mit

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ differenzierbar und es gilt

- $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a;b]$. Das heißt F ist eine Stammfunktion von f.
- $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Übungen:

Stellen Sie folgende Situationen graphisch dar und interpretieren Sie die Werte bzw. Ergebnisse:

A1) $I_2(x) = \int_2^x 3t^2\,dt$ A2) $I_2(4)$

B1) $I_0(x) = \int_0^x t^3\,dt$ B2) $I_0(3)$

C1) $I_{-2}(x) = \int_0^x t^3\,dt$ C2) $I_{-2}(-1)$ C3) $I_{-2}(2)$ C4) $I_{-2}(3)$

D1) $I_1(x) = \int_1^x 2t + 4t^3\,dt$ D2) $I_1(25)$

Konsumentenrente und Produzentenrente

Lesen Sie das Beispiel 5.8 auf Seite 374-375 und bearbeiten Sie die Aufgaben

- Seite 383, Nr. 21
- Seite 383, Nr. 22 a-c
- Seite 383, Nr. 23
- Seite 384, Nr. 24