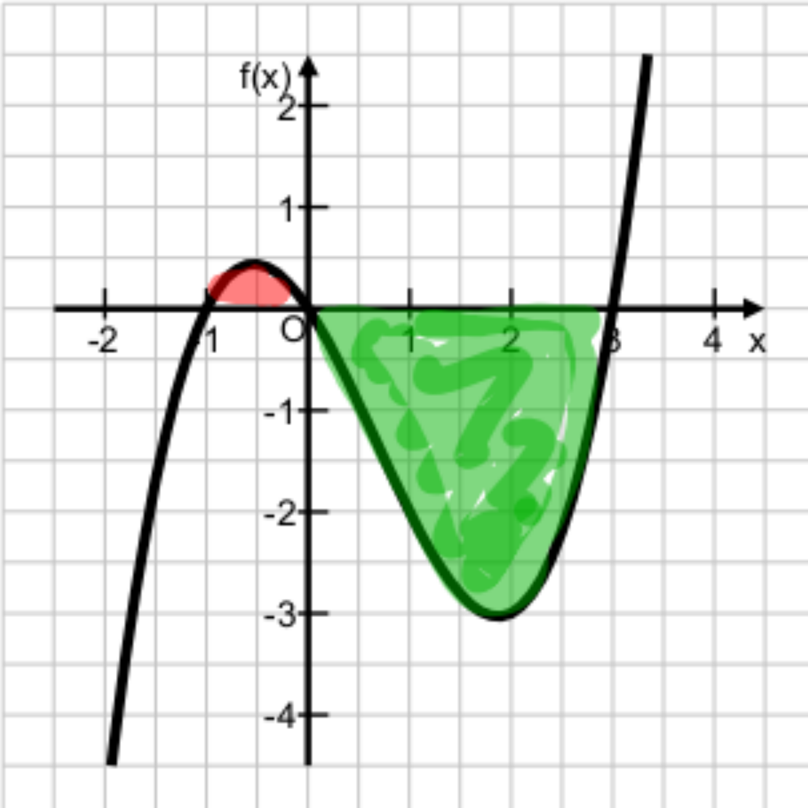
Aufgabe 13

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 1{,}5x$.



a) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen von f(x)und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie die Integralfunktion $J_{-1}(x)$. (ohne Taschenrechner)

c) Beschreiben Sie kurz die Bedeutung der Integralfunktion allgemein und interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung $J_{-1}(0{,}533) = 0$.

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 1{,}5x$

im CAS definieren

Integrationsgrenzen (Nullstellen)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$

solve zeros

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \left| \int_{0}^{3} f(x)\,dx \right| = 0{,}29 + 5{,}625$$

$$\approx 5{,}92$$

Die Fläche hat einen Flächeninhalt von 5,92 FE.

b) $$I_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} 0{,}5 \cdot t^3 - t^2 - 1{,}5 \cdot t \; dt = \left[0{,}125 \cdot t^4 - \frac{1}{3} \cdot t^3 - 0{,}75 \cdot t^2 \right]_{-1}^{x}$$

$$= 0{,}125x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 0{,}75x^2 - \underbrace{\left(0{,}125 \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 0{,}75 \cdot (-1)^2\right)}_{= -\frac{7}{24}} =$$

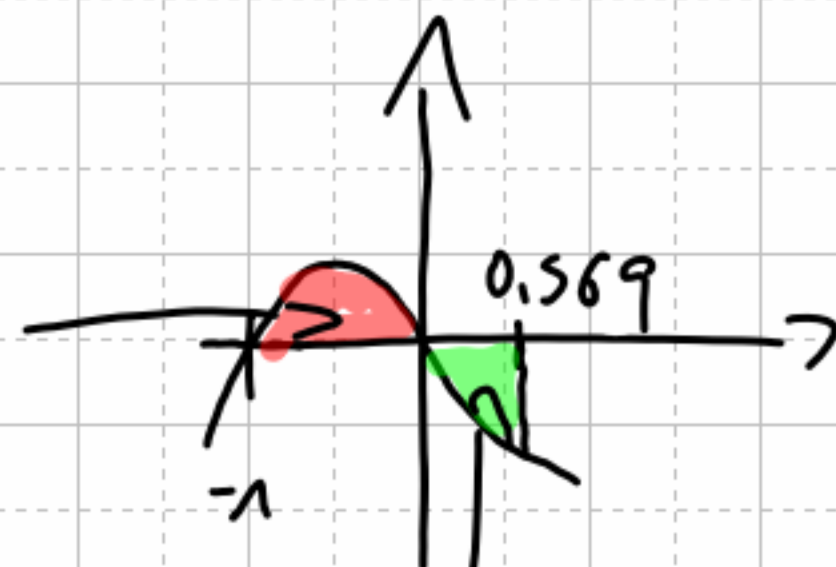
$$0{,}125x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 0{,}75x^2 + \frac{7}{24} = I_{-1}(x)$$

c) Einsetzen einer Zahl für x liefert die Flächenbilanz der positiv und negativ orientierten Flächen zwischen dem Graphen von f(t) der x-Achse und den Senkrechten durch −1 und der Zahl, die eingesetzt wird.

$I_{-1}(0{,}569) = 0$

positiv orientiert

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = 0{,}29$$



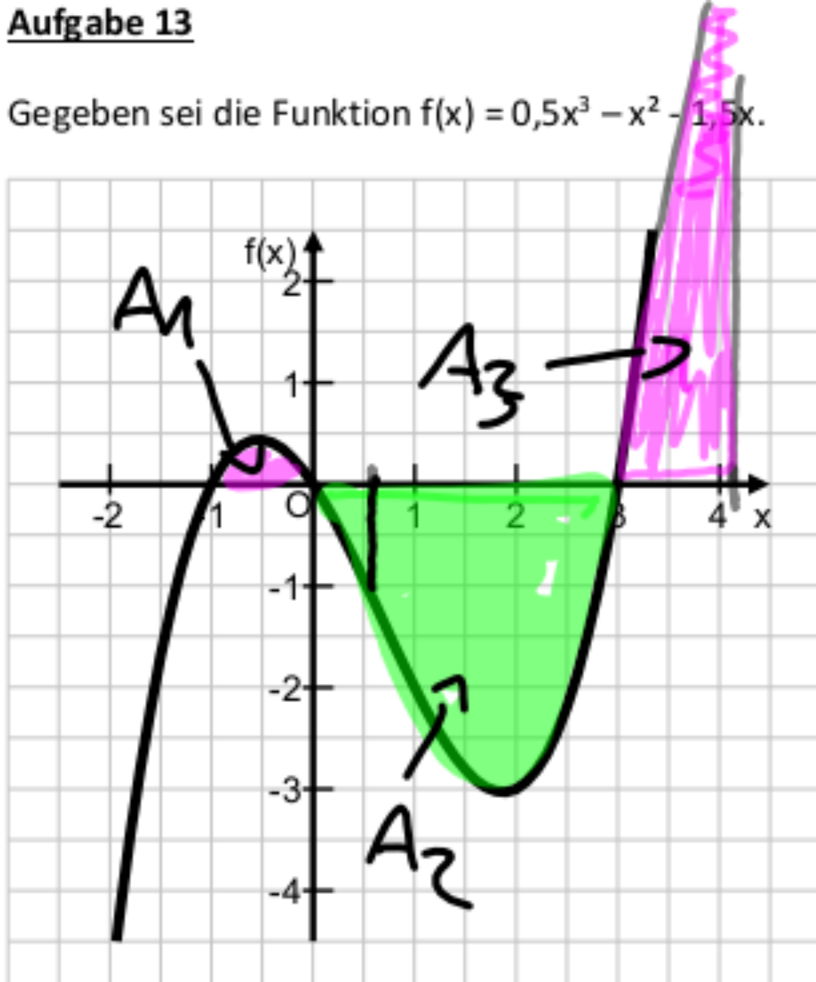
negativ orientiert

$$\int_{0}^{0{,}569} f(t)\,dt = -0{,}29$$

Bedeutung: Die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen Graph und x-Achse von −1 bis +0,533 ist gleich 0, d.h. die Flächeninhalte von −1 bis 0 und 0 bis 0,569 sind gleich groß.

Aufgabe 13

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 1{,}5x$.



a) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen von f(x)und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie die Integralfunktion $J_{-1}(x)$. (ohne Taschenrechner)

c) Beschreiben Sie kurz die Bedeutung der Integralfunktion allgemein und interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung J_{-1} ($\cancel{0{,}533}$) = 0.

0,569

$$I_{-1}(x) = 0{,}125x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 0{,}75x^2 + \frac{7}{24}$$

CAS i(x) := ...

$$I_{-1}(x) = 0 \iff x = -1$$
$$x = 0{,}569$$
$$x = 4{,}097$$

solve(i(x)=0,x)

$I_{-1}(4{,}097) = 0$ bedeutet, dass $A_1 + A_3 = A_2$ gilt, also die lila Flächen zusammen so groß sind wie die grüne Fläche.

Aufgabe 14

Die Niederschlagsrate während eines Monsumregens kann modellhaft beschrieben werden durch die Funktion r mit $r(t) = 23 - 0{,}02e^t$ (t in Tagen seit dem Einsetzen des Regens und r(t) in Liter pro Quadratmeter und Tag gemessen).

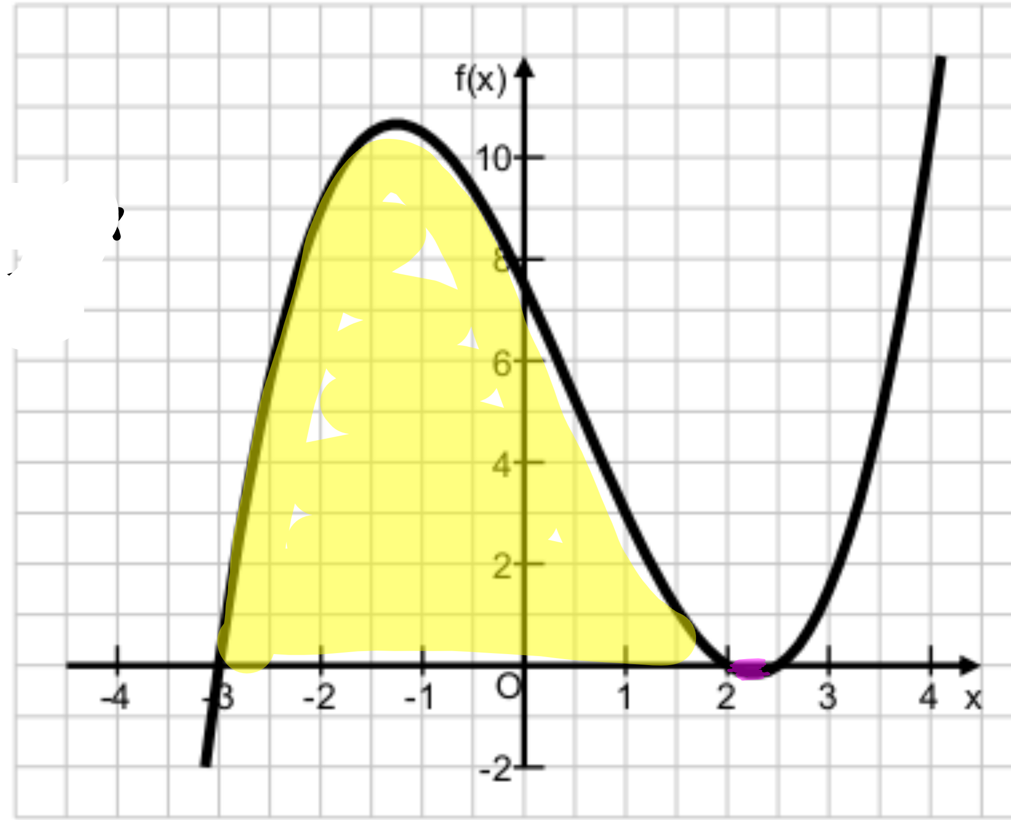
a) Bestimmen Sie, wann der Regen aufhört.

b) Erklären Sie, wie man die gesamte Niederschlagsmenge pro Quadratmeter des betroffenen Gebietes für t Tage ermitteln kann. Sie müssen nicht rechnen.

c) Berechnen Sie, welche Wassermenge insgesamt während des Regens auf jeden Quadratmeter Fläche des betroffenen Gebiets niedergeht.

WGY12, MLK,
23.02.22

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{2}$.



a) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie die Integralfunktion $J_2(x)$.

c) Beschreiben Sie kurz die Bedeutung der Integralfunktion allgemein und interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung $J_2(2{,}74) = 0$.

Aufgabe 16 (OHIMI)

Bestimmen Sie für $f(x) = x^2$ die Untersumme U_4 und die Obersumme O_4 und stellen Sie den Sachverhalt in einer Skizze graphisch dar. Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von f(x), der x-Achse und der senkrechten Gerade x = 4 eingeschlossen wird.

Tipps zum Üben für alle Aufgaben: Versuchen Sie oft es geht, die Stammfunktionen ohne den Taschenrechner zu ermitteln.

a) 1) Nullstellen

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3,\ x=2,\ x=2{,}5$

↳ mit solve oder zeros

↳ Integrationsgrenzen

1. Teilfläche: $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \frac{125}{4} = 31{,}25$

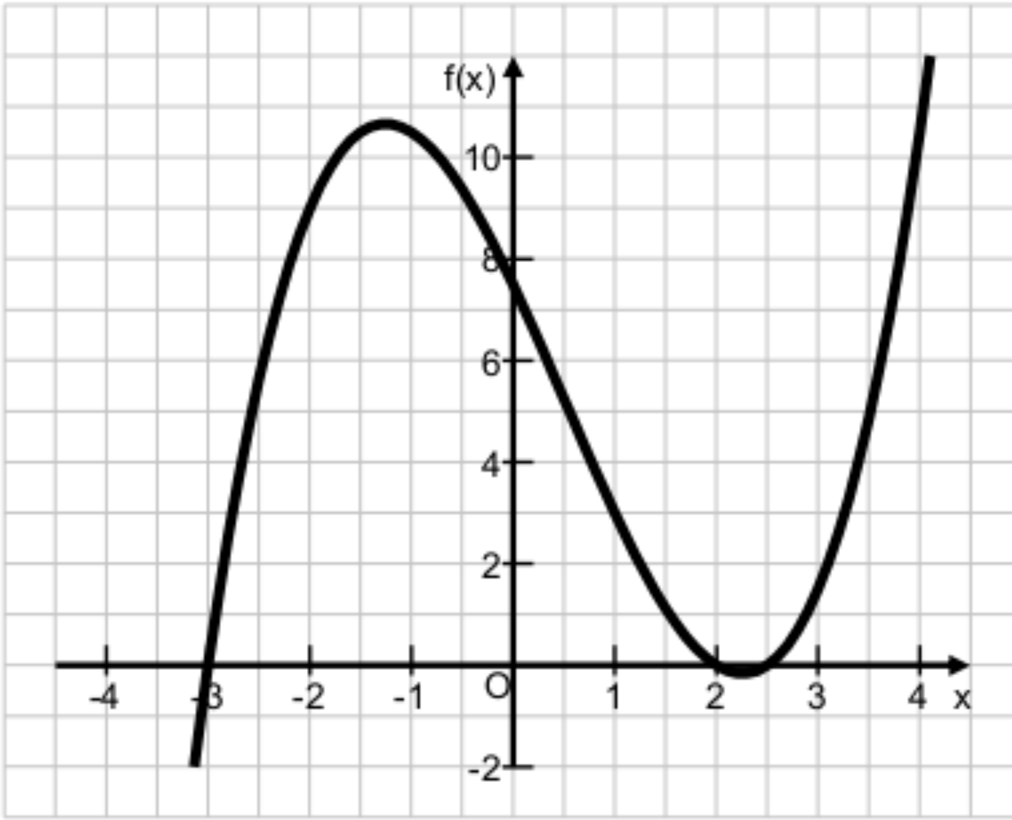
2. Teilfläche: $\left|\int_{2}^{2{,}5} f(x)\,dx\right| = |-0{,}05|$
$= 0{,}05$

Gesamtfläche

$A = 31{,}25 + 0{,}05$
$= 31{,}3$

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{2}$.



a) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen von $f(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

b) Bestimmen Sie die Integralfunktion $J_2(x)$.

c) Beschreiben Sie kurz die Bedeutung der Integralfunktion allgemein und interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung $J_2(2{,}74)=0$.

b) $$I_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \Big[\underbrace{\frac{1}{8}\cdot t^4 - \frac{1}{4}t^3 - 2{,}125t^2 + 7{,}5t}_{\text{Stammfunktion}}\Big]_2^x$$

$$= \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2{,}125\cdot x^2 + 7{,}5x\right) - \underbrace{\left(\frac{1}{8}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 2^3 - 2{,}125\cdot 2^2 + 7{,}5\cdot 2\right)}_{=\,6{,}5}$$

$$= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2{,}125x^2 + 7{,}5x - 6{,}5$$

CAS ist „doof"

1) f(x) definieren im CAS

2) Integralfunktion definieren

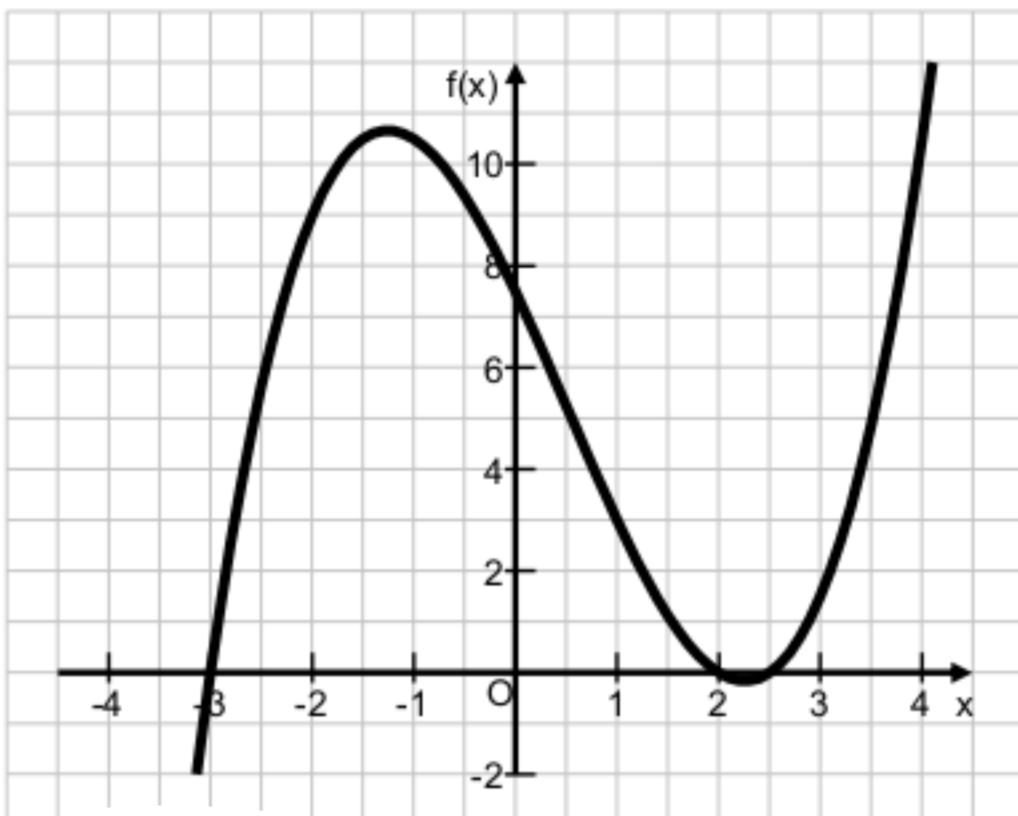
$$i(x) := \int_2^x f(x)\,dx$$

↳ mathematisch „nicht sauber"

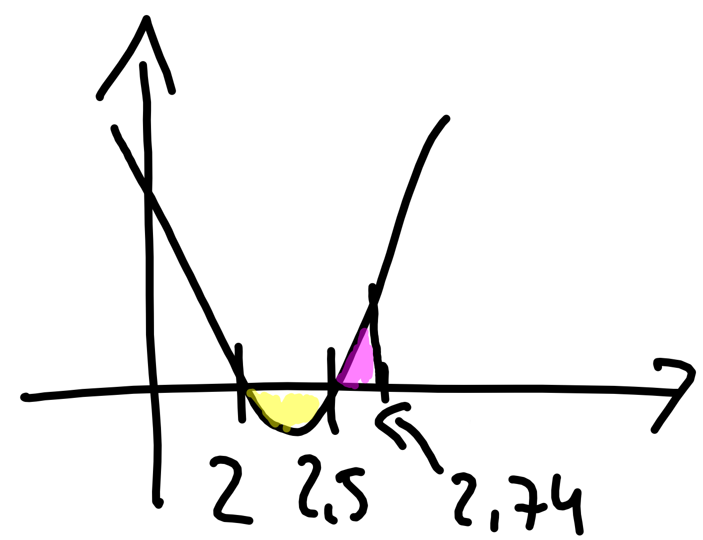
x hat zwei verschiedene Bedeutungen!

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + \frac{15}{2}$.



c) Die Integralfunktion $J_2(x)$ gibt die Summe der orientierten Flächeninhalte der Flächen zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den Senkrechten durch 2 und einer variablen Grenze x an („Flächenbilanz")



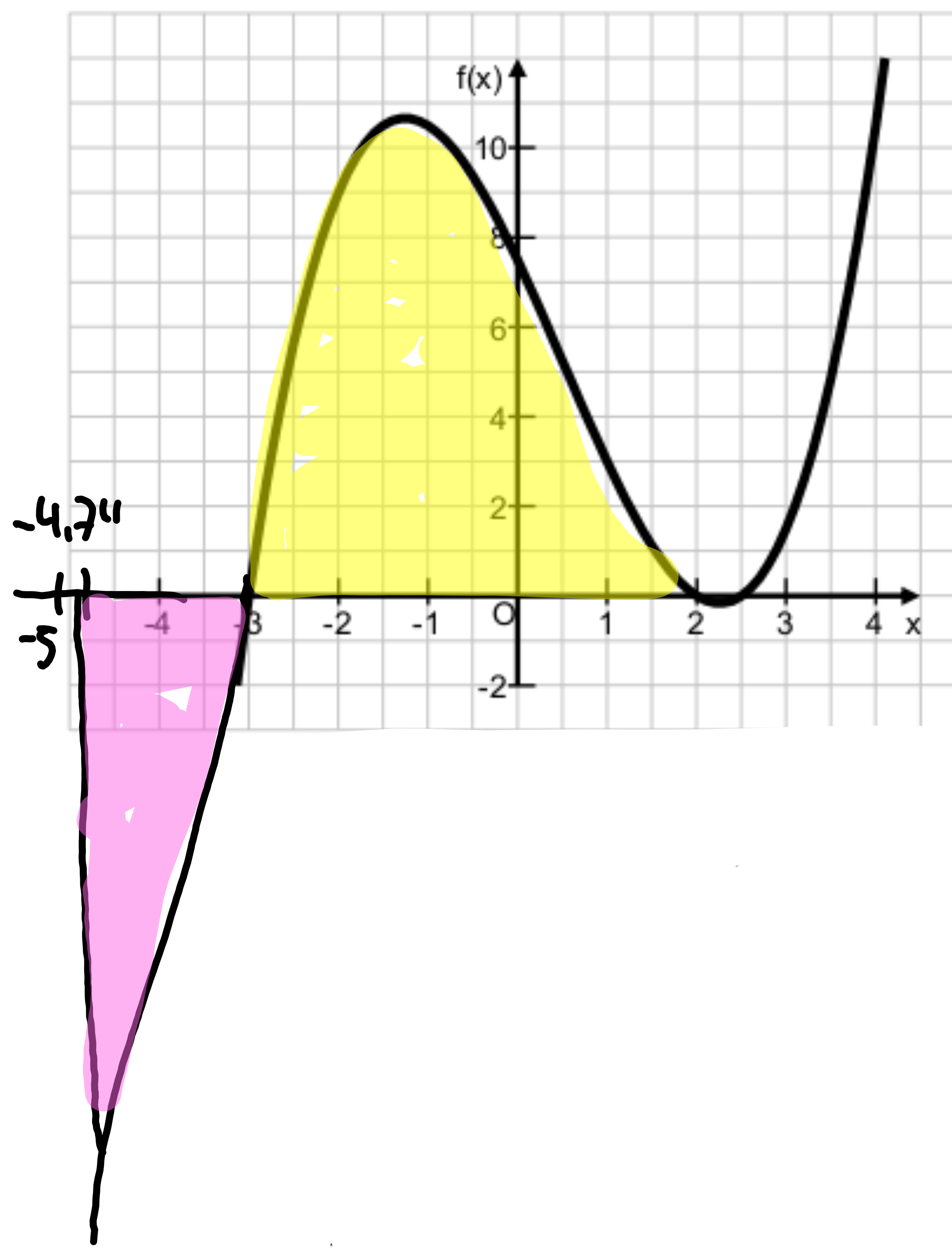
$J_2(2{,}74) = 0$ bedeutet, dass die Flächeninhalte der Flächen von 2 bis 2,5 und von 2,5 bis 2,74 gleich groß sind.

- $x = 2{,}74$ ist Nullstelle der Integralfunktion $J_2(x)$
- Weitere Nullstellen sind $x = 2$ und $x = -4{,}74$ mit solve oder zeros

→ Skizze nächste Tafel

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{2}$.



$$J_2(-4{,}74)=0$$

bedeutet

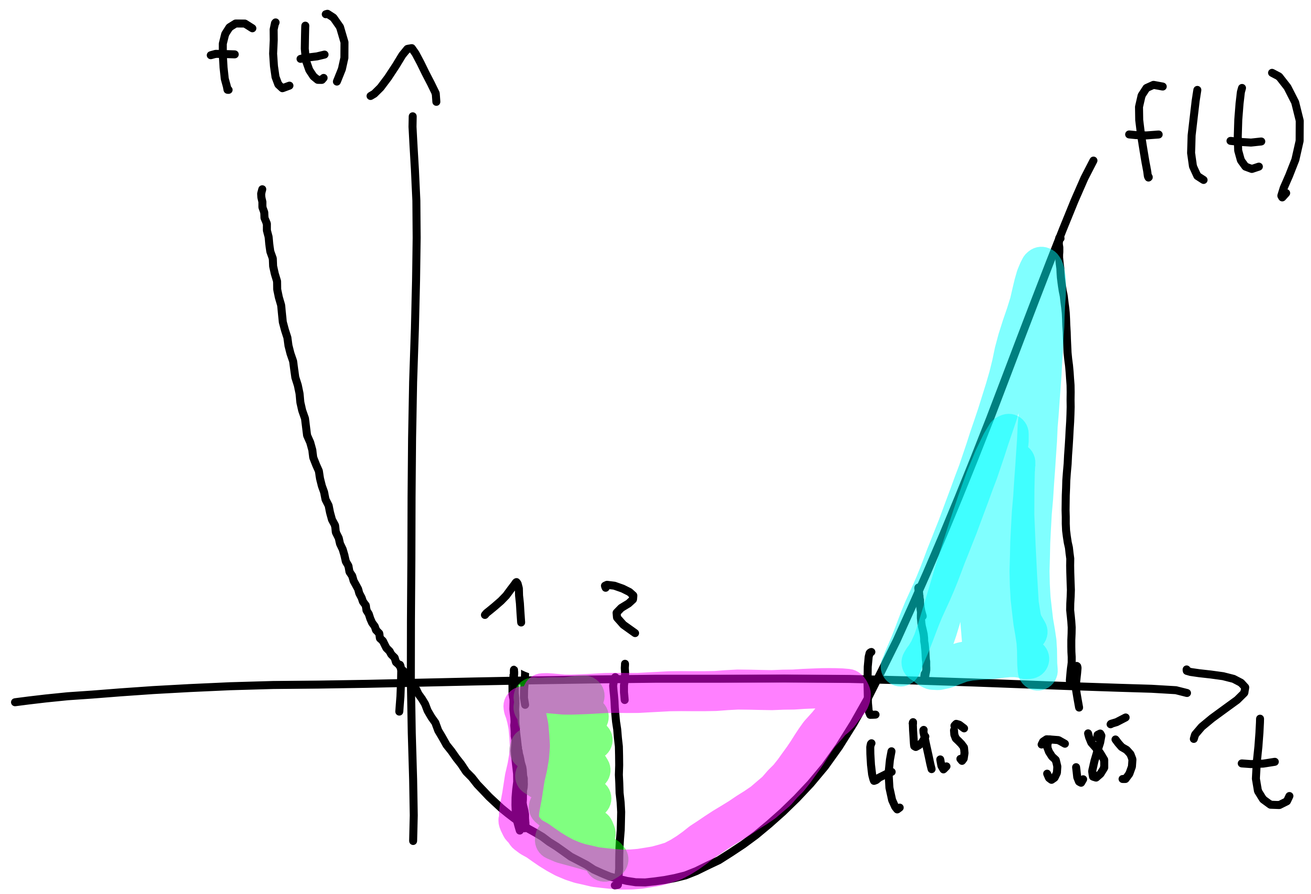
$$\left|\int_{-4{,}74}^{-3} f(t)\,dt\right| = \int_{-3}^{2} f(t)\,dt$$

Tipps zum Üben für alle Aufgaben: Versuchen Sie oft es geht, die Stammfunktionen ohne den Taschenrechner zu ermitteln.

Übung

Nullstellen der Integralfunktion

$x = -0{,}85 \quad x = 1 \quad x = 5{,}85$



$$f(t) = t^2 - 4t$$

Bestimmen Sie

$$I_1(x) := \int_1^x f(t)\,dt$$

$$I_1(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{5}{3}$$

$$I_1(5{,}85) = 0$$

0 und 4 sind Nullstellen von der Parabel $f(t) = t^2 - 4t$

$I_1(2) < 0$

$I_1(4) < 0$

$I_1(4{,}5) < 0$