Interpretation von Flächeninhalten

Je nachdem, was für einen funktionalen Zusammenhang eine Funktion f beschreibt, kann die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse innerhalb bestimmter Grenzen a und b unterschiedlich interpretiert werden. Hier einige Beispiele.

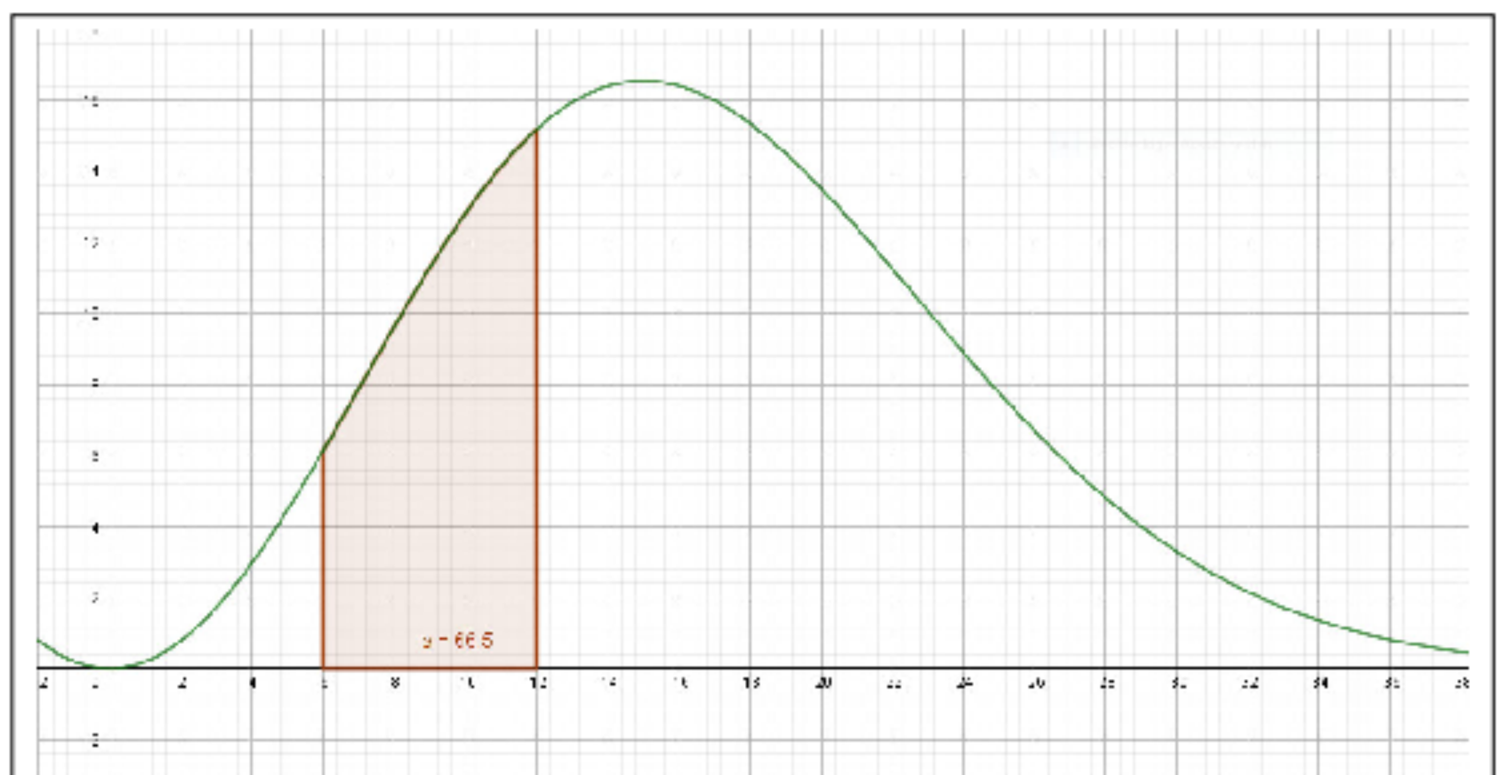
Beispiel 1: Absatzzahlen in Abhängigkeit von der Zeit

Wenn eine Funktion den Absatz zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt, so kann mit Hilfe eines Integrals (also eines Flächeninhalts) der Gesamtabsatz innerhalb eines bestimmten Zeitraums ermittelt werden.

Die Funktion f(t) beschreibt die prognostizierten monatlichen Absatzraten eines Produktes in den kommenden vier Jahren.

$$f_1(t) = 0{,}2 \cdot t^2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{15}\right)^2}$$

Dabei steht t für die seit Markteinführung des Produktes vergangene Zeit in Monaten.
$f_1(t)$ gibt die zugehörigen Absatzraten des Produktes zum Zeitpunkt t in Mengeneinheiten (ME) pro Monat an.
Die folgende Abbildung zeigt die Graphen von f_1 im Prognosezeitraum von 4 Jahren.



Das Integral $\int_6^{12} f(t)\,dt = 66{,}5$ ergibt den gesamten prognostizierten Absatz im zweiten Halbjahr nach Produkteinführung in Mengeneinheiten. Falls 1 ME = 100 Stück gilt, beträgt der Gesamtabsatz 66.500 Stück. Für den prognostizierten Gesamtabsatz anderer Zeiträume

Beispiel 4: Kostenfunktionen

Die Sielhorst GmbH ist ein mittelständisches Unternehmen, das hochwertige Edelstahlgefäße anfertigt. Der ertragsgesetzliche Kostenverlauf wird durch $K(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 30x + 500$ beschrieben. Berechnen Sie das Integral der Grenzkostenfunktion von 0 bis 20 und interpretieren Sie das Ergebnis.

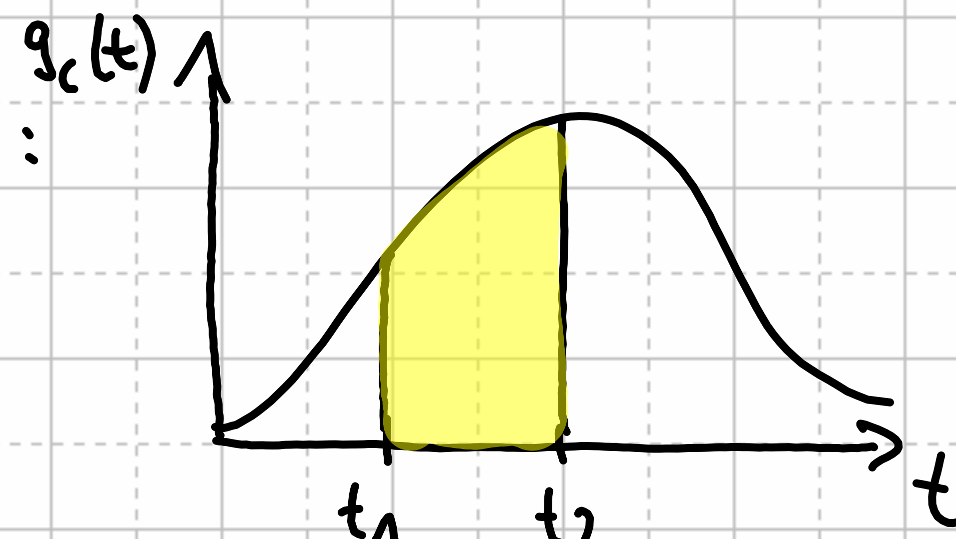
In diesem Beispiel entspricht der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Grenzkostenfunktion $K'(x)$, der x-Achse und den senkrechten Geraden durch 0 und 20 demWert der variablen Kosten für die Produktionsmenge $x = 20$.

$$\int_0^{20} K'(x)\,dx = [K_V(x) + K_{fix}]_0^{20} = K_V(20) + K_{fix} - (K_V(0) + K_{fix}) = K_v(20) + K_{fix} - 0 - K_{fix} = K_V(20)$$

WGY12, MLK, 2.3.22 **Klausurübungen Parameter**

Aufgabe 1 $g_c(t) = c \cdot e^{-0{,}01 \cdot (t-20)^2}$ $t \geq 0,\ c > 0,\ c \in \mathbb{R}$

$g_c(t)$ gibt Anzahl verkaufter Produkte im Monat t in ME an.

Erinnerung: 

$\int_{t_1}^{t_2} g_c(t)\,dt$ gibt den gesamten Absatz in ME zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an.

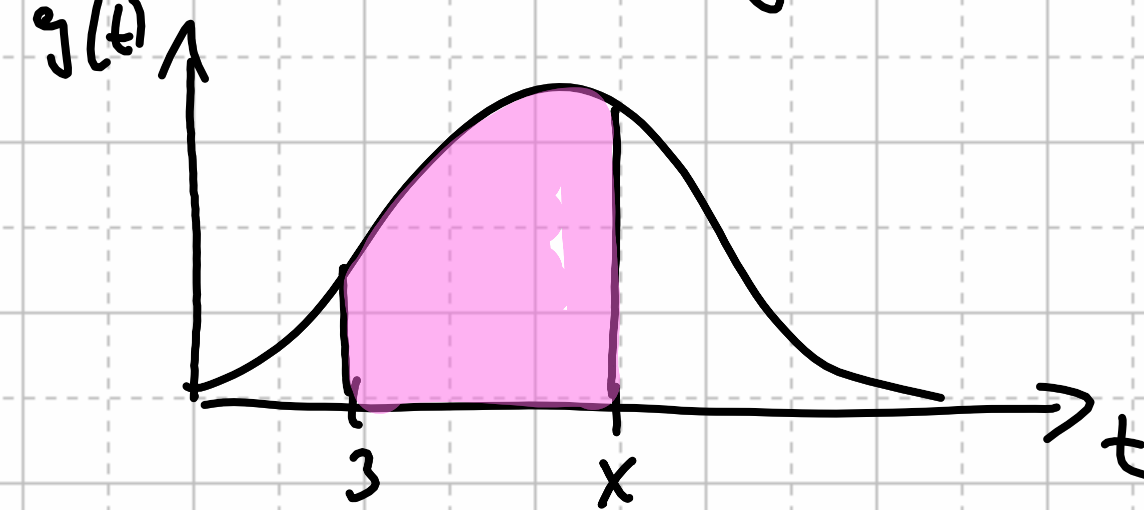
$\Rightarrow$ Lösung: $\int_0^{12} g_c(t)\,dt = 240$ oder $\varnothing$ 20/Monat $\hat{=}$ 240 im ganzen Jahr

$\hookrightarrow$ solve$\left(\int_0^{12} g_c(t)\,dt = 240,\ c \right)$

$\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} g_c(t)\,dt = 20 \iff c = 106{,}9$

b) $c = 70$ neu definieren $g(t) = 70 \cdot e^{-0{,}01 \cdot (t-20)^2}$

Erinnerung:



Integralfunktion

$$I_3(x) = \int_3^x g(t)\,dt$$

ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse von 3 bis x

$$I_3(9) = \int_3^9 g(t)\,dt = 64{,}26$$

→ Gesamtabsatz zwischen dem 3. und 9. Monat in ME (2.+3. Quartal)

$$I_3(12) = \int_3^{12} g(t)\,dt = 149{,}93$$

→ Gesamtabsatz zwischen 3. und 12. Monat in ME (2.+3.+4. Quartal)

c) $f(t) = -\frac{9}{1000}t^3 + \frac{9}{25}t^2$ als Alternative

Integralfunktion $I_3(x) = \int_3^x f(t)\,dt = \frac{-9x^4}{4000} + \frac{3x^3}{25} - \frac{12231}{4000}$

$I_3(9) = \int_3^9 f(t)\,dt = 69{,}66$ → wie in b) Gesamtabsatz 2+3 Quartal

$I_3(12) = \int_3^{12} f(t)\,dt = 157{,}65$ → " " " " 2+3+4 Quartal

⇒ Die Absatzfunktion $f(t)$ prognostiziert leicht höhere Absatzzahlen als $g_{70}(t)$, aber anhand der geringen Unterschiede wären beide Funktionen gut geeignet.

Aufgabe 2   HA

Strategie: mit $K'(x) \rightarrow K(x)$ als Integral (auf Fixkosten achten)

aus $p(x) \rightarrow E(x) = p(x) \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x)$

Es gilt $K(7) = E(7)$ oder $G(7) = 0$