WGY12, MLk
21.3.22

Partielle Integration

$\int (1+x) \cdot e^x \; dx$ $\Rightarrow$ Funktion ist ein Produkt aus zwei Faktoren $(1+x)$ und e^x und beide Faktoren enthalten die Variable x.

Erinnerung: Ableitungen von Produkten mit Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

kurz $f' = u' \cdot v + u \cdot v' = (u \cdot v)'$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ ist Stammfunktion von $f'(x)$ $\Leftrightarrow$

$u(x) \cdot v(x)$ ist Stammfunktion von $u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

CAS: $\int (1+x)\cdot e^x \, dx = x \cdot e^x$

ohne CAS ???

Aus Produktregel zum Ableiten: $\int \underbrace{u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}_{f'(x)} \, dx = \underbrace{u(x)\cdot v(x)}_{f(x)}$

Summenregel

$\Leftrightarrow \quad \int u'(x)\cdot v(x)\, dx + \int u(x)\cdot v'(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) \quad \Big| - \int u(x)\cdot v'(x)\, dx$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\, dx}$$

Ausgangsintegral, das zu bestimmen ist

Restintegral

Problemstellung: Für Funktionen, die als Produkt von zwei verschiedenen Funktionen mit einer Variablen dargestellt werden können $f(x)=u(x)\cdot v(x)$, gibt es für die Bestimmung der Ableitung die Produktregel:

Math. Symbole

$\wedge$: und

$\vee$: oder

Erinnerung: Produktregel zum Ableiten

$$f(x)=x\cdot e^x \Rightarrow u(x)=x \wedge v(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=1 \wedge v'(x)=e^x$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x$$

Wie kann man aber solche Funktionen "aufleiten", also integrieren? Man nutzt die Produktregel! Aus dem Beispiel oben folgt:

$$f'(x)=(1+x)\cdot e^x \Rightarrow f(x)=x\cdot e^x$$ **(Vergleich 1)**

Wir werden nun die **partielle Integration** am Beispiel dieser Funktion nachvollziehen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird statt u(x) und v(x) nur u und v verwendet!

$$[u\cdot v]'=u'\cdot v+u\cdot v'$$
$$\int [u\cdot v]'\,dx=\int u'\cdot v\,dx+\int u\cdot v'\,dx \Leftrightarrow$$
$$[u\cdot v]=\int u'\cdot v\,dx+\int u\cdot v'\,dx \,\Big|-\int u\cdot v'\,dx$$
$$\Leftrightarrow [u\cdot v]-\int u\cdot v'\,dx=\int u'\cdot v\,dx$$

Zeile 1: Produktregel beim Ableiten
Zeile 2: "Aufleiten", also Integrieren
Zeile 3: Stammfunktion von (u·v)' ist (u·v)
Zeile 3: Statt $\Big|-\int u\cdot v'\,dx$ ginge auch $\Big|-\int u'\cdot v\,dx$

Es gilt also, je nachdem, was in Zeile 3 subtrahiert wird, die Regel zur "Partiellen Integration" oder auch "Produktintegration":

$$\int u'\cdot v\,dx=[u\cdot v]-\int u\cdot v'\,dx$$
oder
$$\int u\cdot v'\,dx=[u\cdot v]-\int u'\cdot v\,dx$$

Anmerkung: Es ist also egal, ob man den ersten Teil des Produkts als u' und den zweiten Teil als v definiert oder umgekehrt
den ersten Teil des Produkts als u und den zweiten Teil als v' definiert. Man muss nur auf der anderen Seite aufpassen!

In diesem Erklärvideo von Daniel Jung (Link auch auf der Homepage unter Jung 1) können Sie das nochmal "animiert" sehen:
https://www.youtube.com/watch?v=8SkIIzBP5FY

Achtung:

Bei „ungeschickten" Zuordnen von u und v' passiert folgendes

$u(x) = e^x$

$u'(x) = e^x$

$v'(x) = (1+x)$

$v(x) = x + \frac{x^2}{2}$

Jetzt das konkrete Beispiel:

$\int (1+x)\cdot e^x \, dx$ soll bestimmt werden.

Man wählt $u(x) = 1+x$ und $v'(x) = e^x$.

Tipp: Probieren Sie später aus, was passiert, wenn man wählt: $u'(x) = 1+x$ und $v(x) = e^x$.

Nun gilt nach der Regel für die partielle Integration: $\int u\cdot v' \, dx = [u\cdot v] - \int u'\cdot v \, dx$

Also setzen wir ein:

$\int (1+x)\cdot e^x \, dx = \left[(1+x)\cdot e^x\right] - \int 1\cdot e^x \, dx$ Denn wenn $u(x) = 1+x$ dann ist $u'(x) = 1$

Jetzt kann auf der rechten Seite das Integral $\int 1\cdot e^x \, dx$ bestimmt werden, denn eine Stammfunktion von $1\cdot e^x$ ist $1\cdot e^x$ oder nur e^x, also

$$\int (1+x)\cdot e^x \, dx = \left[(1+x)\cdot e^x\right] - e^x$$

In der eckigen Klammer wird nun ausmultipliziert und erhält:

$$\int (1+x)\cdot e^x \, dx = \left[e^x + x\cdot e^x\right] - e^x$$

Und wenn man die eckige Klammer jetzt weglässt, kann man $e^x - e^x$ zusammenfassen und es bleibt übrig:

$$\int (1+x)\cdot e^x \, dx = x\cdot e^x$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Zeile **(Vergleich 1)** und erkennen Sie, dass man beim "Aufleiten" oder Integrieren von $\int (1+x)\cdot e^x \, dx$ tatsächlich $x\cdot e^x$ erhält. Und wie wir bei der Erinnerung an die Produktregel gesehen haben, ist die Ableitung von $x\cdot e^x$ ja genau $(1+x)\cdot e^x$. Also muss dieser Vorgang auch umkehrbar sein, und das haben wir gerade gezeigt!

Bevor Sie nun selbst in Aktion treten und mit Hilfe der partiellen Integration Stammfunktionen oder Integrale berechnen, schauen Sie noch ein weiteres Erklärvideo von

$\int u \cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$

$u(x) = 1 + 1\cdot x$

$u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$

$v(x) = e^x$

$\int (1+x)\cdot e^x \, dx = (1+x)\cdot e^x - \int 1\cdot e^x \, dx$

$= (1+x)\cdot e^x - e^x$

$= \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} = \underline{\underline{xe^x}}$

1. <u>Übung</u>: $\int x \cdot e^x \, dx$

Regel: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$u(x) = x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$u'(x) = 1$ $\quad$ $v(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$$

$$= x \cdot e^x - 1 \cdot e^x = \underline{(x-1) \cdot e^x} = e^x \cdot (x-1)$$

2. <u>Übung</u>: $\int x \cdot e^{2x} \, dx$ $\quad$ u