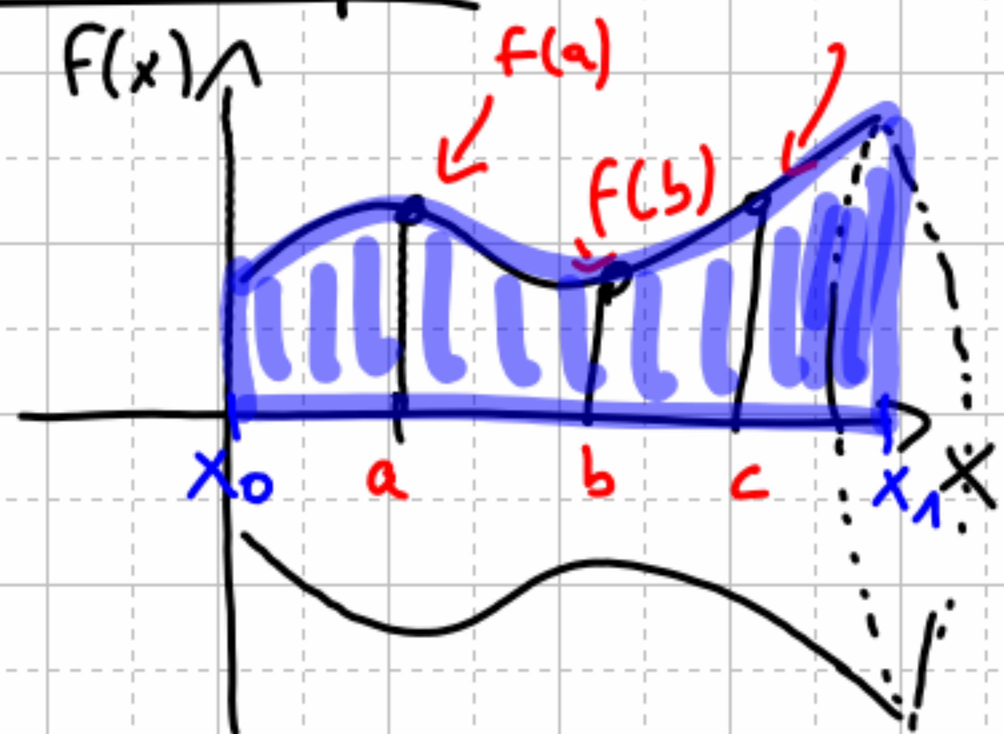
WGY12, MLk

Rotationskörper



Die Funktionswerte $f(a)$, $f(b)$ und $f(c)$ entsprechen den Kreisradien bei a, b, c.

↳ Flächen der Kreise

allg.: $\pi \cdot r^2$

bei a: $\pi \cdot f(a)^2$

b: $\pi \cdot f(b)^2$

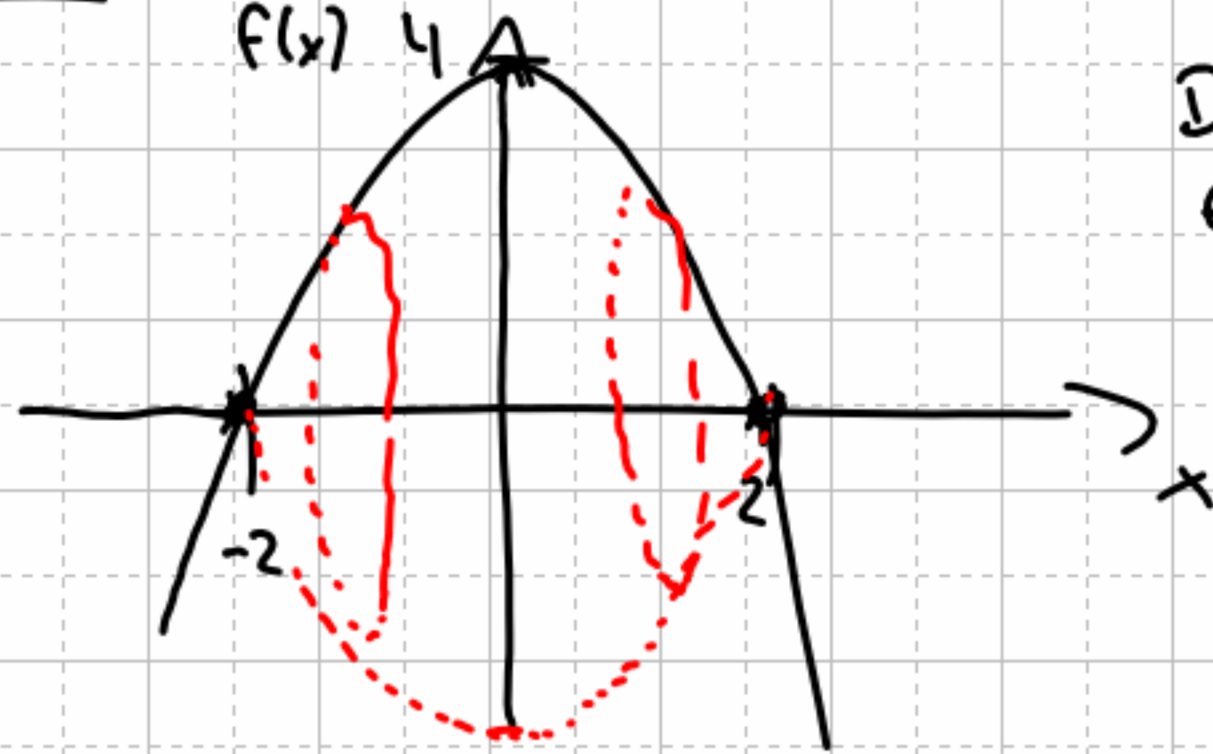
c: $\pi \cdot f(c)^2$

Für das Volumen benötigt man unendlich viele, unendlich dünne Zylinder, die den „Kreisflächen" entsprechen

Für die Rotation der ganzen Fläche benötigt man das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_{x_0}^{x_1} (f(x))^2 \, dx$$

Bsp: $f(x) = -x^2 + 4$



Durch Rotation um die x-Achse entsteht ein Paraboloid

Volumen des Paraboloid

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^{2} (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-2}^{2} (-x^2+4)^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-2}^{2} 16 - 8x^2 + x^4 \, dx$$

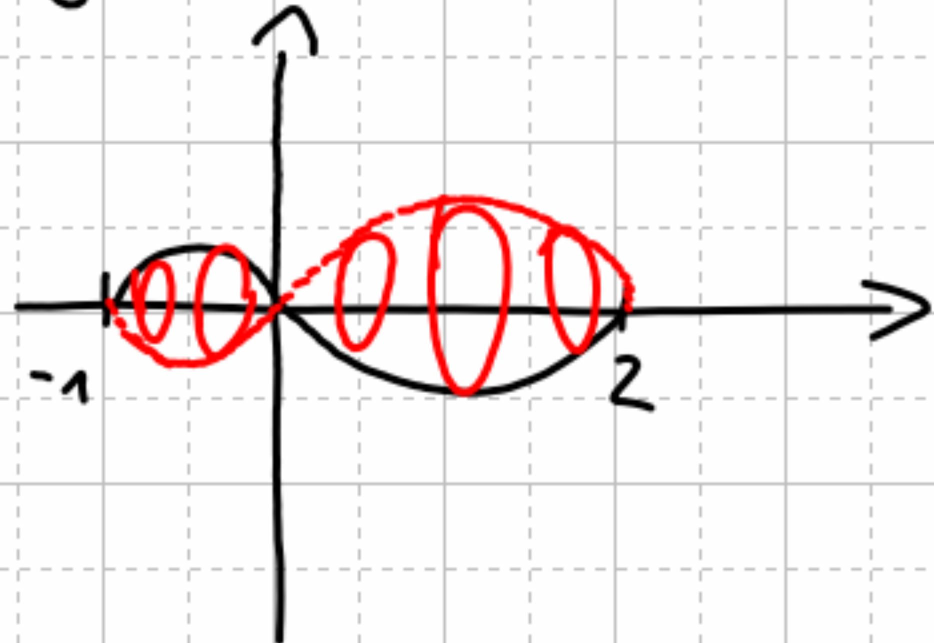
NR: $(-x^2+4)^2 = (4-x^2)^2$

$= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 + x^4$

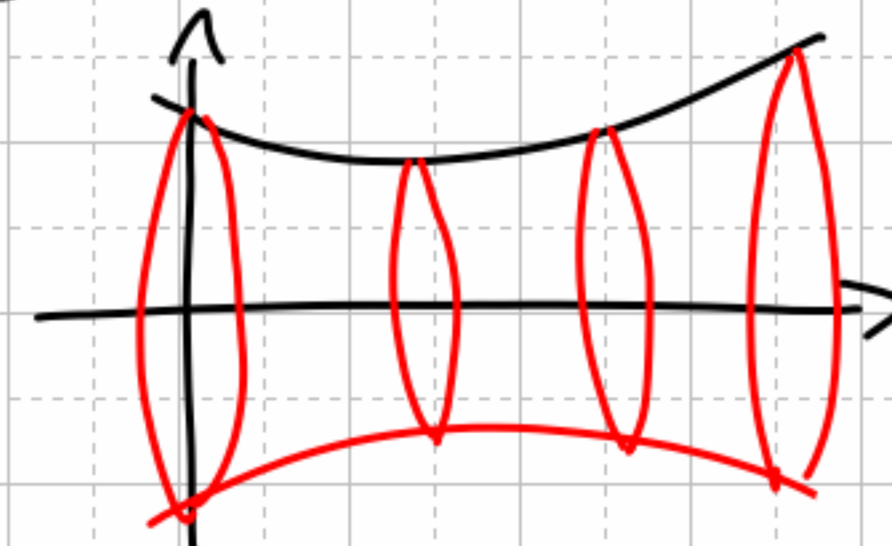
$$= \pi \cdot \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \pi \cdot \left[16 \cdot 2 - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \left(16 \cdot (-2) - \frac{8 \cdot (-2)^3}{3} + \frac{(-2)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{256}{15} - \left(-\frac{256}{15}\right)\right] = \pi \cdot \frac{512}{15} = 107{,}23 \text{ VE}$$

Aufgabe 1



Aufgabe 3



1) $f(x) := x^3 - x^2 - 2x$ im CAS definieren

2) Nullstellen: $f(x) = 0 \iff x = -1,\ x = 0,\ x = 2$

solve oder zeros

3) $V = \pi \cdot \int_{-1}^{0} (f(x))^2\,dx + \pi \cdot \int_{0}^{2} (f(x))^2\,dx = 0{,}658 + 13{,}88 = 14{,}54$ VE

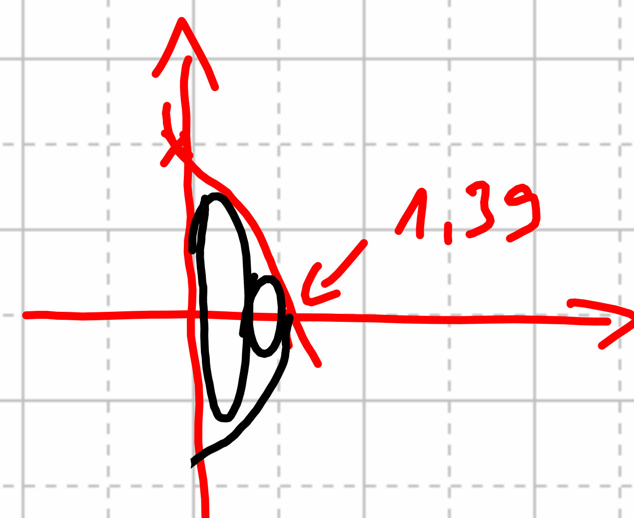
WGY13, MLK, 25.03

Aufgabe 2

1) $f(x) := 4 \cdot e^{-x} - 0{,}25 \cdot e^{x}$ im CAS definieren

2) Nullstellen berechnen $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}39$

Skizze

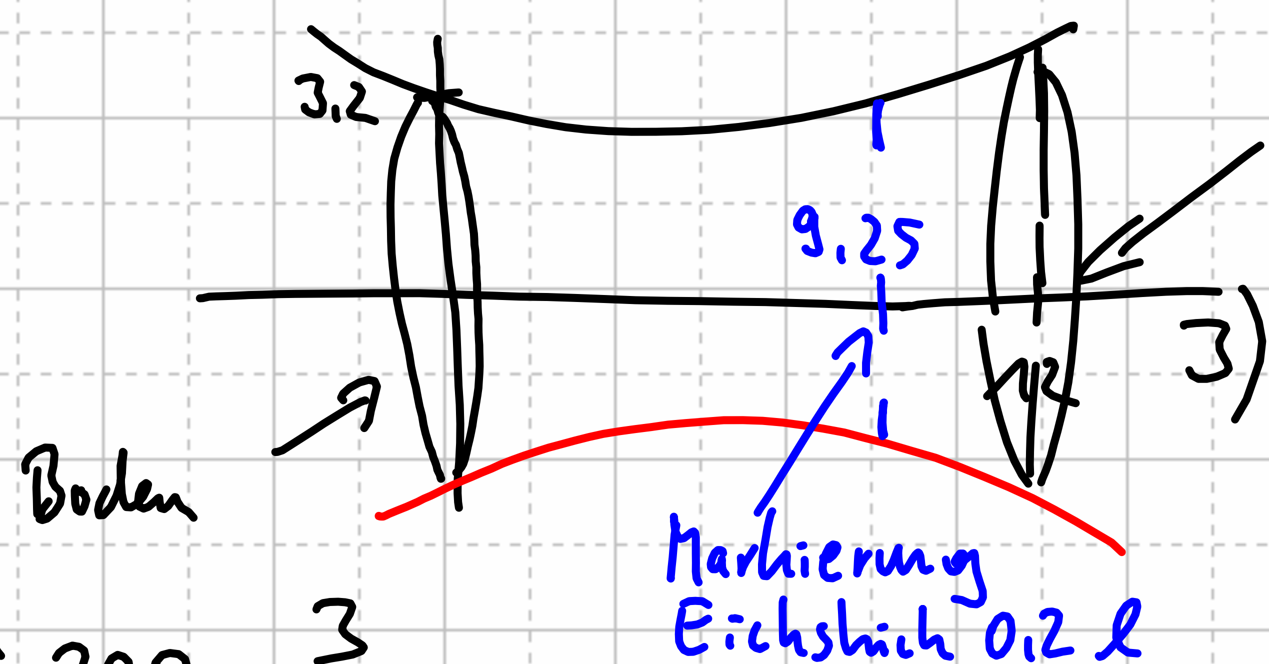


3) $V = \pi \cdot \int_{0}^{1{,}39} (f(x))^2 \, dx = 16{,}32$ VE

Aufgabe 3

a) 1) $f(x) := 0{,}02x^2 - 0{,}25x + 3{,}2$ definieren im CAS

2) Skizze: nach oben geöffnete (0.02), gestauchte ($0{,}02 < 1$) Parabel (x^2) mit y-Abschnitt $+3{,}2$.



3) Volumen des Glases

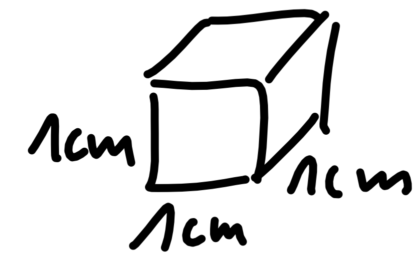
$$V = \pi \cdot \int_0^{12} (f(x))^2 \, dx = 268{,}53 \text{ cm}^3 = 0{,}26853 \text{ l}$$

b) $0{,}2 \text{ l} \mathrel{\hat{=}} 200 \text{ cm}^3$

$$V = 200 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow \pi \cdot \int_0^b (f(x))^2 \, dx = 200 \Leftrightarrow b = 9{,}25$$ solve(, b)

Der Eichstrich muss in 9,25 cm Höhe angebracht werden.

Umrechnung Volumen



$V = 1\,cm \cdot 1\,cm \cdot 1\,cm = 1\,cm^3$

$1\,dm \cdot 1\,dm \cdot 1\,dm = 1\,dm^3 \mathrel{\hat{=}} 1\,l$

$10\,cm \cdot 10\,cm \cdot 10\,cm = 1000\,cm^3 \mathrel{\hat{=}} 1\,l$

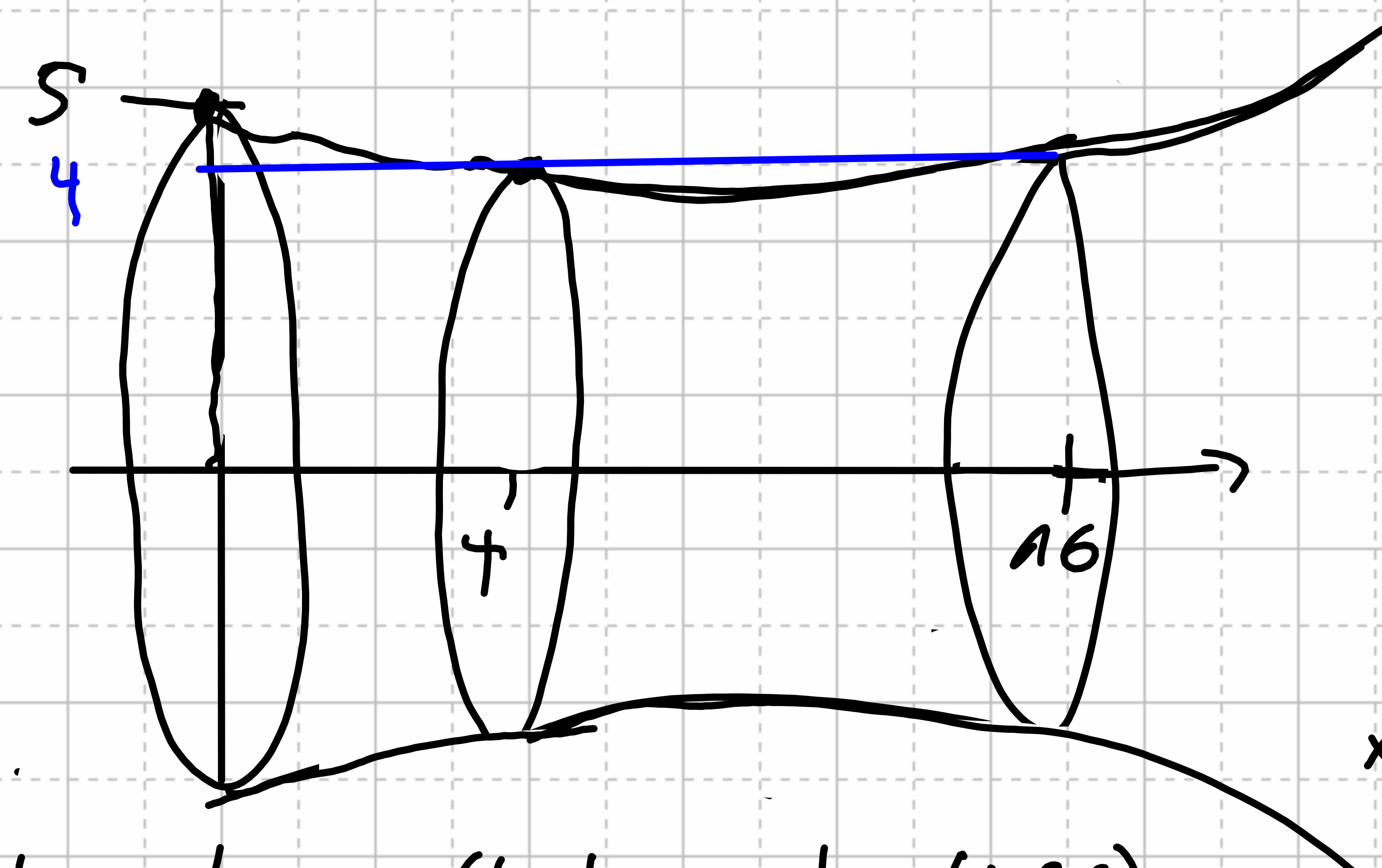
$1000\,cm^3 \mathrel{\hat{=}} 1\,l$

$268\,cm^3 \mathrel{\hat{=}} 0{,}268\,l$

Aufgabe 3

gesucht: $g(x)$ Funktion 2. Grades $\qquad g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $a \neq 0$

Skizze



Einsetzen der Werte in $g(x)$

$x = 4$: $g(4) = 4$

$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 4$

$x = 0 \qquad g(0) = 5$

$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \iff \underline{\underline{c = 5}}$

$x = 16 \qquad g(16) = 4$

$a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c = 4$

Es entsteht ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\left| \begin{array}{l} 16a + 4b + c = 4 \\ 0a + 0b + c = 5 \\ 256a + 16b + c = 4 \end{array} \right| \underset{\text{Linsolve}}{\rightsquigarrow} \begin{array}{l} a = 0{,}015625 = \frac{1}{64} \\ b = -0{,}3125 = -\frac{5}{16} \\ c = 5 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{1}{64}x^2 - \frac{5}{16}x + 5$$

Kontrollrechnung $\quad V = \pi \cdot \int_0^{16} (g(x))^2 \, dx = 747{,}28 \text{ cm}^3$

$\hookrightarrow$ voll bis zum Rand

0.5 l-Eichstrich bei 10.0225 cm.

$$\pi \cdot \int_0^{b} (g(x))^2 \, dx = 500 \iff b = 10.0225$$