Erster Schritt: Was ist Ω? Die Ergebnismenge muss nicht immer aufgeschrieben werden, bei einfachen Zufallsversuchen hat man sie im Kopf und kann damit arbeiten. Im Zweifel kann man sie aber kurz notieren, um sicherzustellen, dass man kein Ergebnis vergisst.

Zweiter Schritt: Definition der Zufallsvariable und Aufschreiben der Werte, die die Zufallsvariable annehmen kann.

Dritter Schritt: Für jeden Wert der Zufallsvariable die entsprechende Wahrscheinlichkeit aufschreiben. Eventuell muss man diese erst berechnen.

<u>Beispiel für das Glücksspiel von oben</u>

Erster Schritt: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Zweiter Schritt: Definition der Zufallsvariable. **ZV X = Gewinn in € aus Sicht der Klasse.**

Welche Werte kann die Zufallsvariable annehmen? Die Klasse kann 10 € verlieren, wenn eine 6 gewürfelt wird, das entspricht einem Wert von $x_1 = -10$ €. Die Klasse kann 1 € gewinnen, wenn keine 6 gewürfelt wird, das entspricht einem Wert von $x_2 = +1$ €.

Zusammenfassung: 6 gewürfelt → -10 €

Keine 6 gewürfelt → +1 €

Als Tabelle:

Mögliche Werte der Zufallsvariable	$x_1 = -10$ €	$x_2 = +1$ €

Hinweis: Es sind auch mehr als zwei Werte für eine Zufallsvariable möglich, in diesem einfachen Beispiel sind es aber nur zwei verschiedene Werte.

Dritter Schritt: Ergänzen der Tabelle um die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten und fertig ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X: Gewinn in € aus Sicht der Klasse

Mögliche Werte der Zufallsvariable X	x_1 = -10 €	x_2 = +1 €
Wahrscheinlichkeiten der Werte P (X = x_i)	P(X = - 10) = 1/6	P (X = +1) = 5/6

<u>Erwartungswert (Buch Seite 445)</u>

Der Erwartungswert μ = E(X) einer Zufallsvariable X ist eine Art Durchschnittswert und hilft u.a. bei der Analyse von Glücksspielen (wie im Beispiel) oder bei der Kostenrechnung oder Preisfestsetzung für ein Produkt.

Für die Berechnung werden alle Werte der Zufallsvariable mit ihren Wahrscheinlichkeiten multipliziert und die einzelnen Ergebnisse addiert. Lassen Sie sich von der kompliziert aussehenden Formel im Buch nicht abschrecken, es ist halb so wild.

Beispiel für das Würfelspiel von oben: $\mu = E(X) = -10\,€ \cdot 1/6 + 1€ \cdot 5/6 = -5/6\,€ = -0{,}83\,€$

Interpretation: Auf lange Sicht (bei theoretisch unendlich vielen Spielen) verliert die Klasse pro Würfelrunde im Schnitt 0,83 €, auch wenn zwischendurch mal 50 Würfe lang keine 6 kommt wird sich das langfristig ausgleichen und die Klasse verliert.

Regel: Ein Glücksspiel gilt als fair, wenn der Erwartungswert μ = E(X) einer Zufallsvariable X : Gewinn in € aus Sicht von … gleich 0 ist.

E(X) = 0 ⇔ Glückspiel ist fair

<u>Weitere Beispiele:</u>

- **<u>Buch Seite 441 Beispiel (Lupe) 6.32a</u>**
- **<u>Buch Seite 443 Beispiel (Lupe) 6.33a</u>**
- **<u>Buch Seite 446 Beispiel (Lupe) 6.34a und Beispiel 6.34b</u>**

<u>Übungen:</u>

<u>Buch Seite 445, Alles klar? Nr. 1 und 2</u>

<u>Buch Seite 451, Nr. 11 (ohne Standardabweichung)</u>

Aufgabe1:

Ahmet schlägt seinem Freund Mustafa folgendes Spiel vor: Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt.

- Bei einer Augensumme von weniger als 5 erhält Ahmet von Mustafa 5 €.
- Bei einer Augensumme von 5 oder 6 oder 7 erhält Ahmet von Mustafa 2 €.
- Bei einer Augensumme von 8 passiert gar nichts.
- Bei allen anderen Augensummen muss Ahmet an Mustafa 6 € bezahlen.

a) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert der definierten Zufallsvariable.
c) Begründen Sie, ob das Spiel Ihrer Meinung nach fair ist.

a) ZV X: Gewinn in € aus Sicht von Ahmet ✓

a) Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,5),(6,6)\} \quad |\Omega| = 36$$

Werte der Zufallsvariable

x_i	$x_1 = +5$	$x_2 = +2$	$x_3 = -6$	$x_4 = 0$
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$
	$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$	$\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(6,1)\}$	$\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$	$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

1b) $E(X) = +5 \cdot \frac{6}{36} + 2 \cdot \frac{15}{36} + (-6) \cdot \frac{10}{36} + 0 \cdot \frac{5}{36}$

$= 0$

1c) $\Rightarrow$ Das Spiel ist fair, da der Erwartungswert der ZV X Gewinn in € aus Sicht von Ahmet gleich 0 ist.

Aufgabe 2: (Buch Seite 451 Nr. 12)

Das Spiel „Pentagramm“ wird mit drei Würfeln gespielt. Bei einer Fünf, gewinnt der Spieler 5 €, bei 2 Fünfen gewinnt er 9 € und bei 3 Fünfen gewinnt er 30 €. In allen anderen Fällen verliert er seinen Einsatz in Höhe von y €.
Für die ZV X: „Gewinn in € aus Sicht des Spielers“ gilt folgende Verteilung:

x_i	$5-y$	$9-y$	$30-y$	$-y$
$P(X = x_i)$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{125}{216}$

Berechnen Sie den Einsatz des Spielers damit das Spiel fair wird.

Spiel ist fair $\Leftrightarrow E(X)=0 \Leftrightarrow (5-y)\cdot\frac{75}{216}+(9-y)\cdot\frac{15}{216}+(30-y)\cdot\frac{1}{216}-y\cdot\frac{125}{216}=0$

mit solve

E-Mail: carsten.vooren@bkcr.info