Ordnen Sie bei den folgenden Glücksspielen zuerst die Werte von Ω den Werten der Zufallsvariable zu und ordnen Sie dann den den Werten der Zufallsvariable die Wahrscheinlichkeiten zu. Berechnen Sie als letztes den Erwartungswert der Zufallsvariable X

Aufgabe 3: Es wird eine Münze geworfen. Spieler A erhält 2 Euro von Spieler B, wenn die Münze auf „Kopf" fällt und Spieler B erhält 3 Euro von Spieler A, wenn „Zahl" fällt.

Ergebnismenge Ω = { K ; Z }
Zufallsvariable X: Gewinn in Euro aus Sicht von **Spieler** A
Werte der Zufallsvariable: x_1 = +2 und x_2 = −3

Als Tabelle:

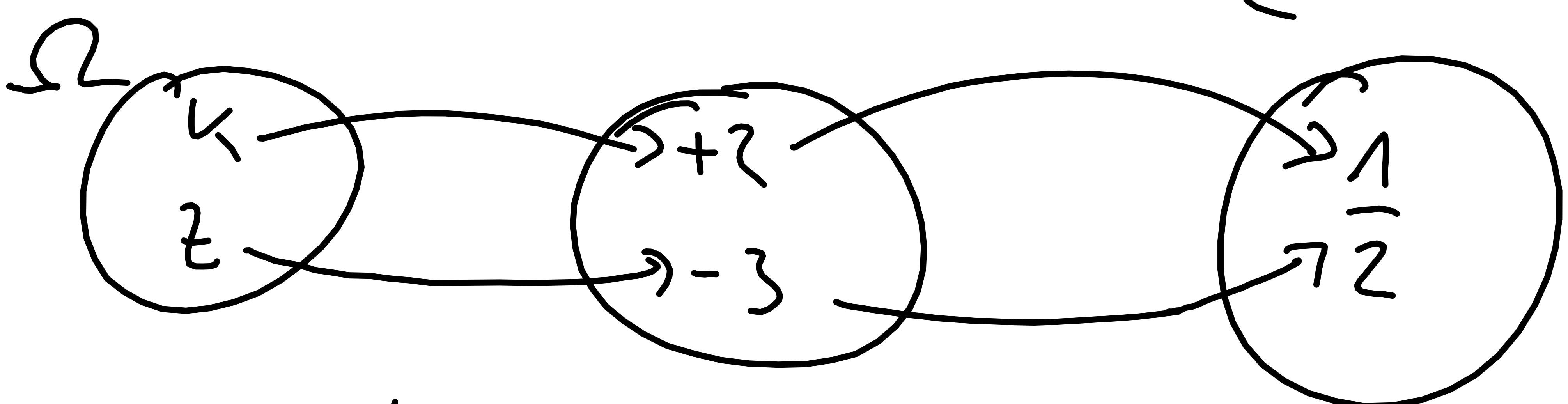
Ergebnis des Zufallsversuchs	Werte der Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeiten
K	+2 €	$\frac{1}{2} = 50\%$
Z	−3 €	$\frac{1}{2} = 50\%$

Die linken beiden Spalten sind die „Zufallsvariable X" und die rechten beiden Spalten sind die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X.

Erwartungswert E(X) = $2 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Spieler A verliert langfristig im Schnitt 0,50 € pro Runde.

Aus Sicht von B
$E(X) = +0{,}5$



ZV X

Verteilung von X

Aufgabe 4: Es wird ein normaler 6er-Würfel geworfen. Spieler A und B vereinbaren folgende Regeln:

→ Bei einer 1 oder 2 zahlt Spieler A an Spieler B 1 Euro.

→ Bei einer 3 zahlt Spieler B an Spieler A 2 Euro.

→ Bei einer 4 oder 5 zahlt Spieler A an Spieler B 0,5 Euro.

→ Bei einer 6 muss keiner was bezahlen.

Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Zufallsvariable X: Gewinn in Euro aus Sicht von **Spieler** A

Werte der Zufallsvariable: $x_1 = -1$ und $x_2 = +2$ und $x_3 = -0{,}5$ und $x_4 = 0$

V

Als Tabelle:

Ergebnis des Zufallsversuchs	Werte der Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeiten
1 oder 2	$x_1 = -1$	$P(X = -1) = \frac{2}{6}$
3	$x_2 = +2$	$P(X = 2) = \frac{1}{6}$
4 oder 5	$x_3 = -0{,}5$	$P(X = -0{,}5) = \frac{2}{6}$
6	$x_4 = 0$	$P(X = 0) = \frac{1}{6}$

Erwartungswert $E(X) = -1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + (-0{,}5) \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} = -0{,}1\overline{6}$

Das Spiel ist nicht fair. Auf lange Sicht ist Spieler A im Nachteil und verliert ca 0,17 € pro Runde.

Aufgabe 5: Es wird ein 12er-Würfel (Laplace) geworfen. Spieler A und B vereinbaren folgende Regeln:

→ Bei einer Primzahl zahlt Spieler A an Spieler B 7 Euro.

→ Bei einer Nicht-Primzahl zahlt Spieler B an Spieler A 5 Euro.

Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, \dots, 11, 12\}$

Zufallsvariable X: Gewinn in Euro aus Sicht von **Spieler** A

Werte der Zufallsvariable: $x_1 = -7$ und $x_2 = +5$

Als Tabelle:

Ergebnis des Zufallsversuchs	Werte der Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeiten
2, 3, 5, 7 oder 11	$x_1 = -7$	$P(X = -7) = \frac{5}{12}$
1, 4, 6, 8, 9, 10 oder 12	$x_2 = +5$	$P(X = 5) = \frac{7}{12}$

Erwartungswert $E(X) = -7 \cdot \frac{5}{12} + 5 \cdot \frac{7}{12} = 0 \Rightarrow$ Spiel ist fair.

→ Bei einer Zahl größer als 4 und kleiner als 10 zahlt Spieler B an Spieler A 5 €.

→ Bei einer Zahl von mindestens 10 und höchstens 16 zahlt Spieler A an Spieler B 4 €.

→ Bei einer Zahl größer als 16 zahlt Spieler B an Spieler A 5 €.

$$E(X) = +3 \cdot \frac{4}{20} - 5 \cdot \frac{5}{20} + 4 \cdot \frac{7}{20} - 5 \cdot \frac{4}{20} = -0{,}25$$

=> Spiel ist nicht fair, langfristig gewinnt Spieler A pro Runde im Schnitt 0,25 €.

Ergebnismenge Ω = { 1, 2, ..., 18, 19, 20 }

Zufallsvariable X: Gewinn in Euro aus Sicht von **Spieler** B

Werte der Zufallsvariable:
x_1 = 3 und x_2 = −5 und x_3 = 4 und x_4 = −5

Als Tabelle:

Ergebnis des Zufallsversuchs	Werte der Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeiten
~~1, 2, 3, 4~~		
1, 2, 3, 4	x_1 = 3	P(X = 3) = $\frac{4}{20}$
5, 6, 7, 8, 9	x_2 = −5	P(X = −5) = $\frac{5}{20}$
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	x_3 = 4	P(X = 4) = $\frac{7}{20}$
17, 18, 19, 20	x_4 = −5	P(X = −5) = $\frac{4}{20}$

Mögliche Schreibweisen bei negativen Werten

$3 \cdot \frac{4}{20} + (-5) \cdot \frac{5}{20} \ldots$

oder

$3 \cdot \frac{4}{20} - 5 \cdot \frac{5}{20}$

Erwartungswert E(X) =

Aufgabe 2: (Buch Seite 451 Nr. 12)

Das Spiel „Pentagramm“ wird mit drei Würfeln gespielt. Bei einer Fünf, gewinnt der Spieler 5 €, bei 2 Fünfen gewinnt er 9 € und bei 3 Fünfen gewinnt er 30 €. In allen anderen Fällen verliert er seinen Einsatz in Höhe von y €.
Für die ZV X: „Gewinn in € aus Sicht des Spielers“ gilt folgende Verteilung:

x_i	$5 - y$	$9 - y$	$30 - y$	$-y$
$P(X = x_i)$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{125}{216}$

Berechnen Sie den Einsatz des Spielers damit das Spiel fair wird.

Spiel ist fair $\Leftrightarrow E(X) = 0 \Leftrightarrow (5-y)\cdot\frac{75}{216} + (9-y)\cdot\frac{15}{216} + (30-y)\cdot\frac{1}{216} - y\cdot\frac{125}{216} = 0$

mit solve $\Leftrightarrow y = 2,50$

Bei einem Einsatz von 2,50 € pro Wurf, ist das Spiel fair.
Wenn der Einsatz höher als 2,50 € ist, gewinnt „das Haus“ auf lange Sicht und bei einem niedrigeren Einsatz als 2,50 € würde der Spieler langfristig Gewinn erzielen.

E-Mail: carsten.vooren@bkcr.info

Varianz und Standardabweichung

Eine Maschine füllt Mehl ab und zwar 500g pro Packung.

Ergebnisse Füllmengen

Packung	1	2	3	4	5	6
Maschine A → Inhalt in g	500	500	504	502	494	500
Maschine B → Inhalt in g	499,8	500,4	499	500	478	501

Varianz: Mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert

Standardabweichung: $\sqrt{\text{Varianz}} = \sigma$ → kleines sigma

Berechnung der Varianz: ZV X: Füllmenge in g pro Packung $E(X) = 500$

Abweichung Maschine A: $\left((500-500)^2+(500-500)^2+(504-500)^2+(502-500)^2+(494-500)^2+(500-500)^2\right)\cdot\frac{1}{6}$

$= \left(0^2+0^2+4^2+2^2+(-6)^2+0^2\right)\cdot\frac{1}{6} = 56\cdot\frac{1}{6} = 9{,}33 = V(X)$

Für die Maschine A beträgt die Varianz, also die mittlere quadratische Abweichung $V(X) = 9{,}33$.

Die Standardabweichung σ hat den Wert $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9{,}33} = \underline{\underline{3{,}05}}$.

Für Maschine B: $$V(X) = \left((499{,}8-500)^2 + (500{,}4-500)^2 + (499-500)^2 + (500-500)^2 + (478-500)^2 + (501-500)^2\right) \cdot \frac{1}{6} = 486{,}2 \cdot \frac{1}{6} = 81{,}03$$

$$= V(X)$$

$$\sigma = \sqrt{81{,}03} = 9{,}001$$

Die Maschine A hat aufgrund der geringeren Standardabweichung „Qualitätsvorteile", da die Abweichung im Schnitt kleiner ist als Maschine B.