		CAS: menu → 5 → 1 → ! Beispiel: Personen in einer Warteschlange
Ohne Beachtung der Reihenfolge	Noch nicht relevant!	Fachbegriff: Kombinationen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{((n-k)! \cdot k!)}$ **Taschenrechner:** **CAS: menu → 5 → 3 → nCr** Beispiel: Lotto

<u>Hinweis:</u> Die Schreibweise $\binom{n}{k}$ bezeichnet den sogenannten **Binomialkoeffizienten** und gibt an, wie viele Möglichkeiten aus einer Menge von n Elementen k auszuwählen (ohne Beachtung der Reihenfolge). Man sagt entweder „n über k“ oder „k aus n“. Alternative zum Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge kann man sich den Zufallsversuch als „Ziehung von k Kugeln mit einem Griff“ vorstellen.

E-Mail: carsten.vooren@bkcr.info http://www.mathekannjeder.de

„Lotto-Formel"

Wenn in einer Urne mit n Kugeln zwei verschiedene Arten von Kugeln sind (z.B. s schwarze Kugeln und n – s weiße) so kann man die Wahrscheinlichkeit, dass man bei k Ziehungen von einer Art Kugeln eine bestimmte Anzahl zieht, z.B. a schwarze Kugeln, wie folgt berechnen:

$$P(w\ weiße\ Kugeln)=\frac{\binom{s}{a}\cdot\binom{n-s}{k-a}}{\binom{n}{k}}$$

Diese Formel kann für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für 2, 3, 4 oder 5 Richtige Kugeln beim Lotto verwendet werden: Dort gibt es dann nicht schwarze und weiße Kugeln, sondern „Gewinnerkugeln" (die gezogen werden) und „Verliererkugeln" (die drin bleiben).

Es werden 6 aus 49 Kugeln gezogen, also gibt es insgesamt $\binom{49}{6}$ mögliche Kombinationen, da ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen wird. CAS: nCr(49.6)

$$P(4\ Richtige)=\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}=\frac{15\cdot 903}{13.983.816}=\frac{645}{665.896}=0,000969=0,097\%$$

$$P(1\ Richtige)=\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}}=\frac{6\cdot 962.598}{13.983.816}=\frac{68.757}{166.474}=0,41302=41,302\%$$

Bsp. BKCR-Lotto

„5 aus 55"

$$P(5\ Richtige)=\frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{50}{0}}{\binom{55}{5}}$$

CAS: nCr(5,5) · nCr(50,0) : nCr(55,5)

menu 5 → 3

$$=\frac{1}{3478761}$$

$$\approx 0,000029\ \%$$

$$P(4\ Richtige)=\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{55}{5}}=\frac{250}{3478761}=0,0072\%$$

$$P(3\ Richtige)=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{50}{2}}{\binom{55}{5}}=\frac{12250}{3478761}=0,35\%$$

Teil A (ohne Hilfsmittel):

- Integralrechnung
    - Partielle Integration

Aufgabe 1: Bestimmen Sie Stammfunktionen von

a) $f(x) = 2x \cdot e^{x}$ b) $f(x) = 2x \cdot e^{2x}$ c) $f(x) = 4e^{0,5x} \cdot (5x - 2)$

- Stochastik
    - Ergebnisse, Ergebnismenge, Ereignisse (auch Gegenereignis)
    - Schnitt- und Vereinigungsmengen
    - Mächtigkeiten von Mengen
    - Laplace-Versuche
    - Satz von Sylvester
    - Vierfeldertafeln
    - Baumdiagramme

Aufgaben

Aufgabe 1

Untersucht wird das folgende Zufallsexperiment: **Einfacher** Wurf eines gleichseitigen Dodekaeders. Das ist ein Körper, der zwölf gleichseitige Fünfecke als Flächen besitzt. Die zwölf Seiten sind von1 bis 12 nummeriert. Ein Ereignis gilt als eingetroffen, wenn der Ikosaeder auf einer seiner zwölf Flächen zum Liegen kommt.

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.

b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Menge dar.

E1: Es wird eine Primzahl gewürfelt.
E2: Es wird eine gerade Zahl gewürfelt.
E3: Es wird eine Zahl größer als 10 gewürfelt.
E4: Es wird eine durch 4 teilbare Zahl gewürfelt.

E5: $E1 \cap E2$ E6: $E1 \cap E4$ E7: $E_2 \cup \overline{E_3}$ E8: $E_4 \cap \overline{E_4}$

Aufgabe 2

Bei einem Roulette-Rad gibt es 37 Felder, die durchnummeriert sind von 0 bis 36. Die 0 hat die Farbe grün, die restlichen Felder sind zur Hälfte rot bzw. schwarz. Lea und Patrick diskutieren, mit welchem Ereignis die Gewinnchancen größer sind. Patrick schlägt vor, auf alle Zahlen, die durch 4 teilbar sind zu setzen und Lea meint, die Gewinnchance wäre größer, wenn man auf alle Primzahlen setzt. Entscheiden Sie, wer von beiden Recht hat, indem Sie wie folgt vorgehen:

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.

b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Menge dar:

E_1: Die Kugel fällt auf ein Feld mit einer Primzahl

Aufgabe 4

Es wird ein normaler 6er-würfel geworfen. Es geht um die Ereignisse „6“ oder „keine 6“. Stellen Sie das Zufallsexperiment „Dreifacher Würfelwurf“ mit den Ergebnissen „6“ und „$\bar{6}$“ (keine 6) als Baumdiagramm dar und geben Sie die Ergebnismenge Ω und deren Mächtigkeit an.

a) Formulieren Sie ein Ereignis für die Menge $A = \{6\bar{6}\bar{6}, \bar{6}6\bar{6}, \bar{6}\bar{6}6\}$

b) Geben Sie das Ereignis B: „Es wird genau eine 6 geworfen.“ als Menge an.

c) Geben Sie das Ereignis C: „Es wird mindestens eine 6 geworfen.“ als Menge an.

Aufgabe 5

Stefan und Janine spielen ein Würfelspiel. Jeder würfelt einmal mit einem idealen Würfel. Das Ergebnis wird in der Form (4,1) angeben, wobei die erste Zahl die Augenzahl von Stefan angibt und die zweite Zahl die Augenzahl von Janine. Das bedeutet also, wenn Stefan eine 4 wirft und Janine eine 2, so wird das Ergebnis als (4,1) angegeben.

a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.
Geben Sie folgende Ereignisse vollständig als Menge an und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

b) Ereignis A: Stefan würfelt eine kleinere Zahl als Janine.

c) Ereignis B: Beide würfeln keine Primzahl.

d) Ereignis C: Janine würfelt eine 5.

e) Ereignis D: Beide würfeln die gleiche Zahl.

f) Ereignis E: $A \cup C$. Nutzen Sie hier den Satz von Sylvester.

Aufgabe 6

Bei der Klassenfahrt der WGY12 an die Nordsee gibt es für die Schüler an zwei Tagen eine Wahl. Am 2. Tag können die Schüler an einer Wattwanderung teilnehmen und am 3. Tag an einer Exkursion zum Windradpark. Aus der Erfahrung der letzten Jahre kann man davon ausgehen, dass 30 % der Schüler an beiden Ausflügen teilnehmen und dass 55% der Schüler die Wattwanderung mitmachen. An einem der beiden Ausflüge müssen die Schüler teilnehmen.

Ermitteln Sie mit Hilfe von zwei geeignet definierten Ereignissen A und B und einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel, welcher Anteil der Schüler

a) nur an der Exkursion zum Windradpark teilnimmt.

b) an keinem der beiden Ausflüge teilnimmt.

c) zum Windradpark fährt.

Teil B:

- Integralrechnung
  - Partielle Integration

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie Stammfunktionen von

a) $f(x) = 6x^2 \cdot e^{2x-4}$ b) $f(x) = (2x + 1) \cdot e^{2x+3}$

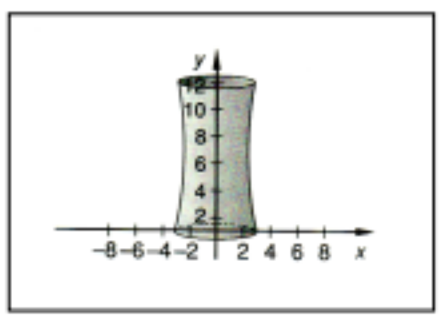
  - Rotationskörper

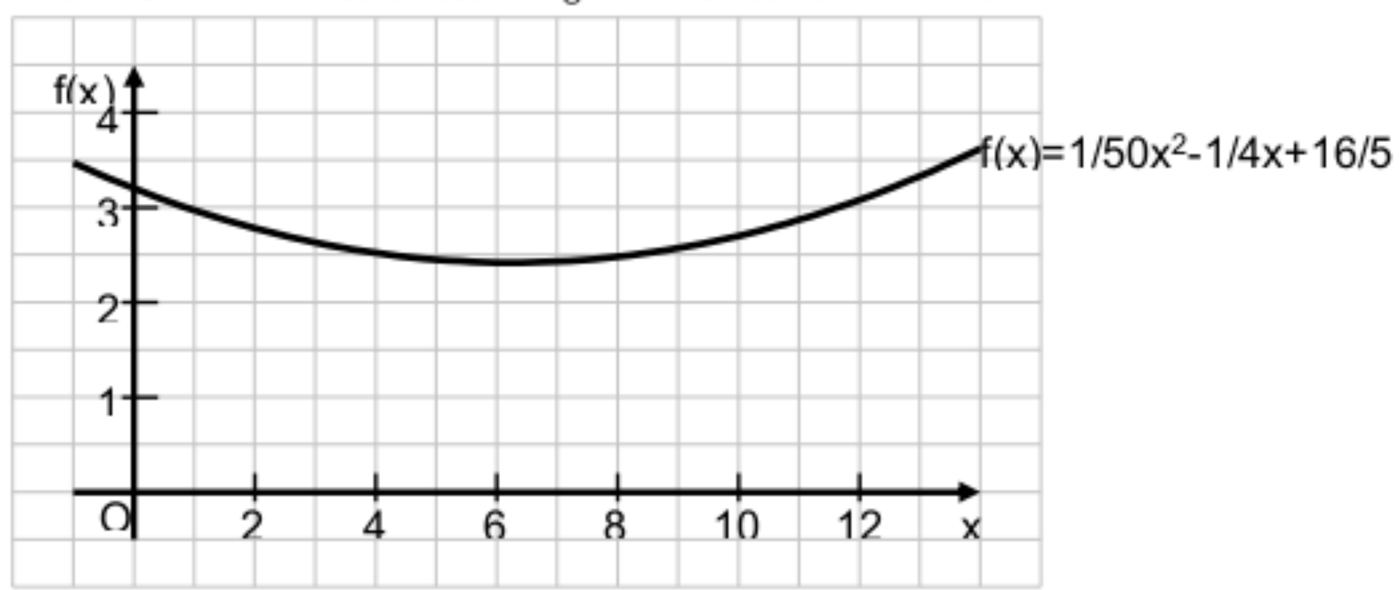
Aufgabe 1:

Eine Brauerei hat von einem Designer ein Bierglas in der unten abgebildeten Form mit einer inneren Höhe von 12 cm entwerfen lassen (Abbildung 1).

Der Verlauf der Innenwand lässt sich bei geeigneter Darstellung im Koordinatensystem durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{16}{5}$ beschreiben (Hinweis: Der Ordinatenabschnitt von f entspricht dem Bodenradius des Bierglases bezogen auf cm.

a) Bestimmen Sie die Volumenmaßzahl des Glases und geben Sie das Volumen in dm^3 an.





Aufgabe 3:

Die Parabel $f(x) = -0.25x^2 + 4$ und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Aufgabe 4:

Die Funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 6$ und $g(x) = -x^2 + 10$ schließen eine Fläche ein, die um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Aufgabe 5:

Die Fläche zwischen den Kurven $f(x) = x$ und $g(x) = x^3$ rotiert um die x-Achse. Das Volumen des Rotationskörpers ist gesucht.

Formel für Volumen von Rotationskörpern

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

- Stochastik
  - Ergebnisse, Ergebnismenge, Ereignisse (auch Gegenereignis)
  - Schnitt- und Vereinigungsmengen
  - Mächtigkeiten von Mengen
  - Laplace-Versuche
  - Satz von Sylvester
  - Vierfeldertafeln
  - Baumdiagramme (auch inverse Baumdiagramme)
  - Totale und bedingte Wahrscheinlichkeiten
  - Satz von Bayes
  - Zufallsvariablen
  - Erwartungswerte (zur Analyse von Glücksspielen und in ökonomischen Anwendungen) von Zufallsvariablen
  - Varianz und Standardabweichung von Zufallsvariablen
  - Urnenmodelle (z.B. Passwörter und Chancen beim Lotto)

Aufgabe 1 (Abitur 2020, LK, CAS)

Die Mandelrath GmbH legt großen Wert auf ihren Ruf als Premiumanbieter, deshalb soll auch nur Premiumqualität als solche verkauft werden. Da sich Fehler in der Produktion aber nicht komplett vermeiden lassen, werden diese laufend analysiert. Bei der Produktion der Florentiner-Törtchen treten unabhängig voneinander Fehler mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

F_1: kein durchgängiger Schokorand: $P(F_1) = 0{,}03$
F_2: Mandelraute nicht in der Mitte: $P(F_2) = 0{,}01$
F_3: ungleichmäßiger Bräunungsgrad: $P(F_3) = 0{,}04$

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für ein fehlerfreies Florentiner-Törtchen etwa 92,2 % beträgt und die für ein Florentiner-Törtchen mit zwei oder drei Fehlern unter 0,2 % liegt.

Bei der Herstellung der Makronen kann es zu Fehlern bei dem Schokoladenüberzug kommen. Einwandfreie Makronen haben die Qualität A (Ereignis A), alle anderen haben die Qualität B. Ein Testgerät wird eingeführt, das die Makronen mit fehlerhaftem Schokoladenüberzug aussortieren soll. Allerdings arbeitet das Testgerät nicht in jedem Fall zuverlässig. Wenn eine Makrone vom Testgerät als Qualität A eingestuft wird, wird das als Ereignis T_A bezeichnet. Eine genauere Untersuchung ergibt die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

→ 12,5 % der Makronen werden vom Testgerät als Qualität B eingestuft.
→ 1 % der vom Testgerät als Qualität A eingestuften Makronen haben tatsächlich die Qualität B.
→ 67 % der vom Testgerät als Qualität B eingestuften Makronen haben tatsächlich die Qualität A.

b) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einem Baumdiagramm mit allen Pfad- und Endwahrscheinlichkeiten oder in einer Vierfelder-Tafel dar.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: Eine Makrone wird vom Testgerät als Qualität A eingestuft und hat tatsächlich Qualität A.

Aufgabe 2
Ein Anbieter von Streaming-Diensten macht in einem großen Elektronikmarkt eine Umfrage über deren Verbreitung. Dabei geht es insbesondere um die Streaming-Dienste „DAZN“ und „Netflix“. Von 1.000 Kunden gaben 685 bei der Umfrage an, dass sie mindestens einen der beiden Anbieter abonniert haben. Den Streaming-Dienst „DAZN“ haben 535 Kunden im Abo und 630 Kunden haben kein „Netflix“.

a) Füllen Sie mit Hilfe von zwei geeignet definierten Ereignissen A und B die Vierfeldertafel vollständig aus.

Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Vierfeldertafel, wie viele Kunden

b) beide Streaming-Dienste abonniert haben.
c) nur ein Netflix-Abo besitzen.

Aufgabe 3
Bei einer Produktion von USB-Sticks werden nacheinander zunächst die Funktionsfähigkeit und anschließend der Barcode geprüft. Die erste Prüfung wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% bestanden, die zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Die Sticks werden verkauft, wenn beide Prüfungen bestanden wurden.

a) Stellen Sie das Prüfungsverfahren als Baumdiagramm dar und beschriften Sie dieses vollständig mit Wahrscheinlichkeiten und Ergebnissen.
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein USB-Stick nicht verkauft wird.

Aufgabe 4
Ahmet schlägt seinem Freund Mustafa folgendes Spiel vor: Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Bei einer Augensumme von 2 oder 3 erhält Ahmet von Mustafa 5 €. Bei einer Augensumme von 4, 5 oder 6 erhält Ahmet von Mustafa 2 €. Bei einer Augensumme von 7 passiert gar nichts und bei allen anderen Augensummen muss Ahmet an Mustafa 2,50 € bezahlen.

a) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung

Aufgabe 5
Das Spiel „Pentagramm“ wird mit drei Würfeln gespielt. Bei einer Fünf, erhält der Spieler 8 €, bei 2 Fünfen erhält er 12 € und bei 3 Fünfen 40 €. In allen anderen Fällen verliert er seinen Einsatz in Höhe von p €.
Für die ZV X: „Gewinn in € aus Sicht des Spielers“ gilt folgende Verteilung:

xi	+8	+12	+40	p
P(X = xi)	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{125}{216}$

Berechnen Sie den Einsatz des Spielers damit das Spiel fair wird.

Aufgabe 6
Beim Lotto in Schweden müssen 7 Zahlen von 1 bis 35 richtig vorhergesagt werden. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln spielt dabei keine Rolle.

a) Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich? (2P.)
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sagt man die 7 gezogenen Zahlen richtig voraus?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den 7 gezogenen Kugeln genau 5 richtig? (Achten Sie auf die Definition einer geeigneten Zufallsvariable!)
e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man von den 7 gezogenen Kugeln mindestens 2 richtig? (Achten Sie auf die Definition einer geeigneten Zufallsvariable!)

Aufgabe 7
Der Betreiber einer Webseite programmiert eine automatische Überprüfung der Sicherheit des eingegebenen Kundenpassworts. Dabei stehen für ihn zwei Alternativen zur Auswahl: Variante 1: ein mindestens 5-stelliger Code bestehend aus den 62 kleinen und großen Buchstaben des Alphabets oder Variante 2: ein mindestens 4-stelliger Code bestehend aus den 94 möglichen Ziffern, Klein- und Großbuchstaben und Sonderzeichen.

a) Begründen Sie, welche der beiden Varianten sicherere ist.
b) Ermitteln Sie die maximale Dauer eines Brute-Force-Angriffs (also das Probieren aller möglichen Passwörter) wenn bei der ersten Variante ein 5-stelliges Passwort und bei der zweiten Variante ein 4-stelliges Passwort gewählt wird, wenn Sie davon ausgehen, dass ein normaler PC in der Lage ist, 2 Milliarden Passwörter pro Sekunde zu überprüfen. Runden Sie auf drei Stellen nach dem Komma.

Aus dem Buch:
Urnenmodelle
S. 427: Nr. 1; 2; 10; 13; 14; 16; 18; 23; 24; 25; 29 („Geburtstagsparadoxon“)

S. 449: „Alles klar?“