Aufgabe 1 (Abitur 2020, LK, CAS)

Die Mandelrath GmbH legt großen Wert auf ihren Ruf als Premiumanbieter, deshalb soll auch nur Premiumqualität als solche verkauft werden. Da sich Fehler in der Produktion aber nicht komplett vermeiden lassen, werden diese laufend analysiert. Bei der Produktion der Florentiner-Törtchen treten unabhängig voneinander Fehler mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

F_1: kein durchgängiger Schokorand: $P(F_1) = 0{,}03$
F_2: Mandelraute nicht in der Mitte: $P(F_2) = 0{,}01$
F_3: ungleichmäßiger Bräunungsgrad: $P(F_3) = 0{,}04$

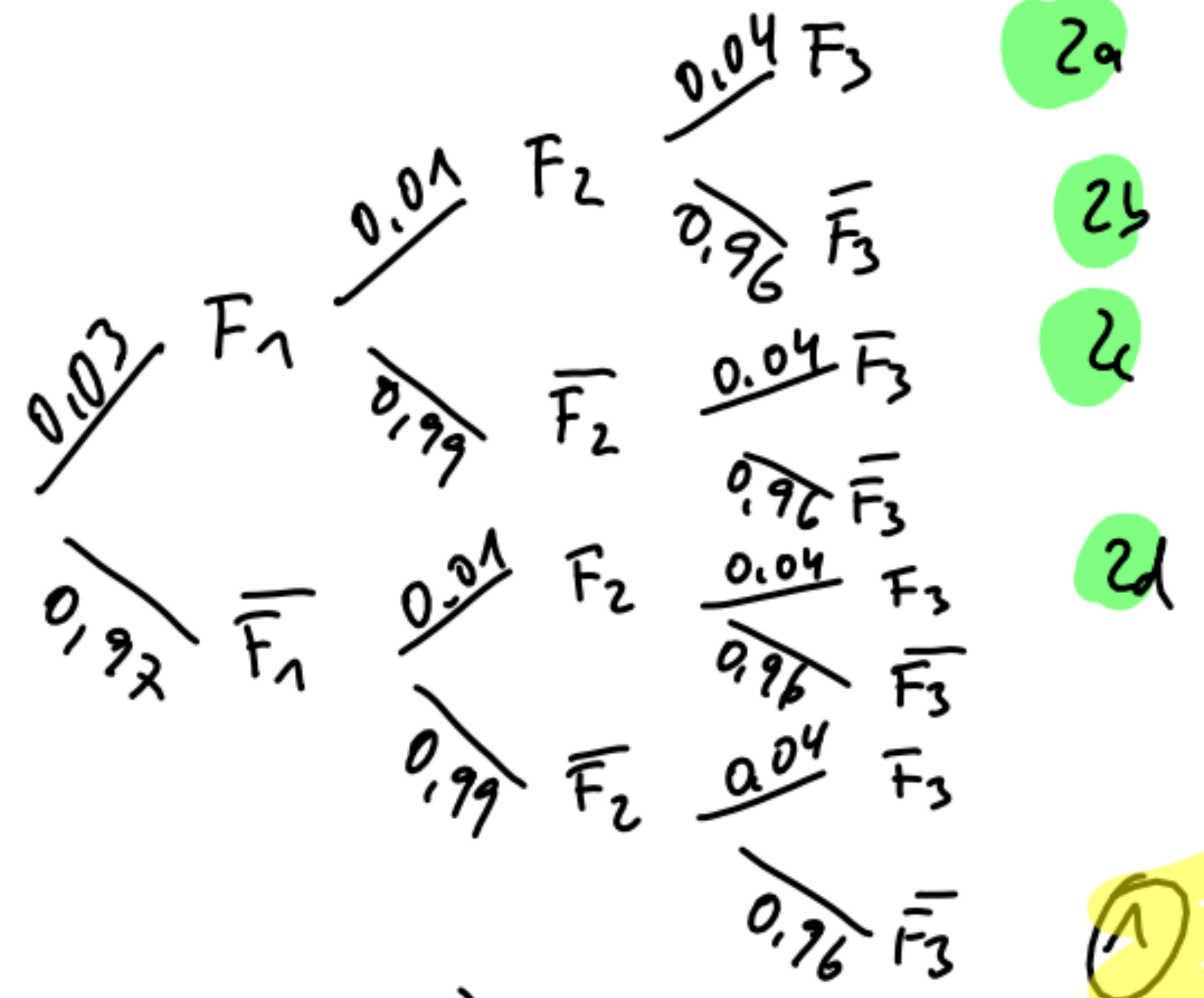
a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für ein fehlerfreies Florentiner-Törtchen etwa 92,2 % beträgt und die für ein Florentiner-Törtchen mit zwei oder drei Fehlern unter 0,2 % liegt.

Bei der Herstellung der Makronen kann es zu Fehlern bei dem Schokoladenüberzug kommen. Einwandfreie Makronen haben die Qualität A (Ereignis A), alle anderen haben die Qualität B. Ein Testgerät wird eingeführt, das die Makronen mit fehlerhaftem Schokoladenüberzug aussortieren soll. Allerdings arbeitet das Testgerät nicht in jedem Fall zuverlässig. Wenn eine Makrone vom Testgerät als Qualität A eingestuft wird, wird das als Ereignis T_A bezeichnet. Eine genauere Untersuchung ergibt die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

→ 12,5 % der Makronen werden vom Testgerät als Qualität B eingestuft.
→ 1 % der vom Testgerät als Qualität A eingestuften Makronen haben tatsächlich die Qualität B.
→ 67 % der vom Testgerät als Qualität B eingestuften Makronen haben tatsächlich die Qualität A.

b) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einem Baumdiagramm mit allen Pfad- und Endwahrscheinlichkeiten oder in einer Vierfelder-Tafel dar.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: Eine Makrone wird vom Testgerät als Qualität A eingestuft und hat tatsächlich Qualität A.
E_2: Eine Makrone hat tatsächlich die Qualität A.
E_3: Eine Makrone mit Qualität A wird vom Testgerät richtig erkannt.



2a) $P(F_1\cap F_2\cap F_3)=0{,}03\cdot 0{,}01\cdot 0{,}04 = 1{,}2\cdot 10^{-5}$

b) $P(F_1\cap F_2\cap \overline{F_3}) = 0{,}03\cdot 0{,}01\cdot 0{,}96 = 2{,}88\cdot 10^{-4}$

d) $P(\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3) = 0{,}97\cdot 0{,}01\cdot 0{,}04 = 1{,}18\cdot 10^{-3}$

c) $P(F_1\cap \overline{F_2}\cap F_3) = 0{,}03\cdot 0{,}99\cdot 0{,}04 = 3{,}88\cdot 10^{-4}$

→ nächste Seite

1 $P(\overline{F_1}\cap \overline{F_2}\cap \overline{F_3})$
$= P(\overline{F_1})\cdot P(\overline{F_2})\cdot P(\overline{F_3}) =$
$0{,}97\cdot 0{,}99\cdot 0{,}96 \approx 0{,}9218$
$\approx 92{,}2\,\%$

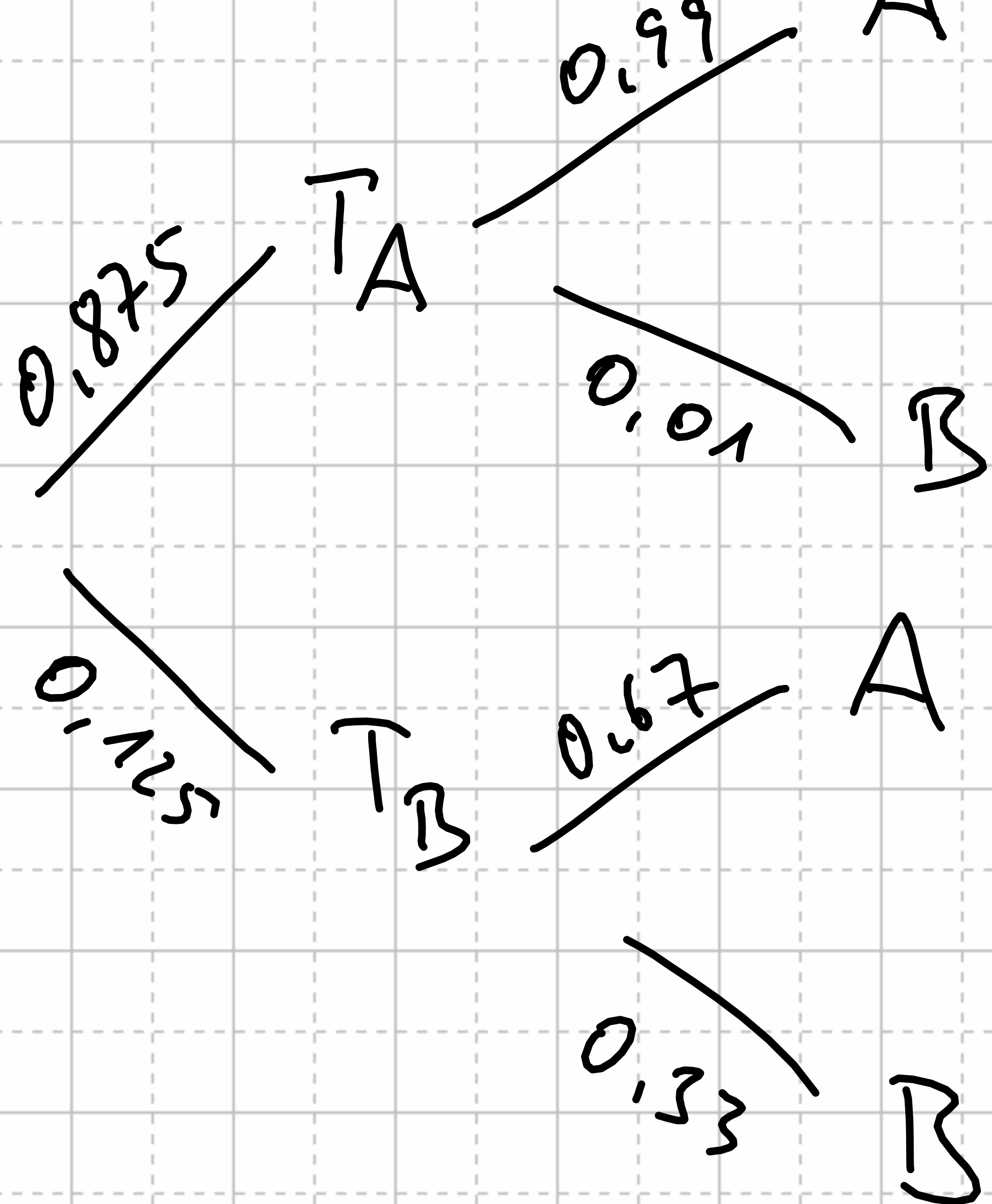
Forbehung

$P(2 \text{ oder } 3 \text{ Fehler}) = 0{,}00186$

$= 0{,}186\,\% < 0{,}2\,\%$ ✓

mit 2. Pfadregel die 4 Wahrscheinlichkeiten addieren.

c)



$P(T_A \cap A) = 0{,}875 \cdot 0{,}99 = 0{,}86625$

$P(T_A \cap B) = 0{,}875 \cdot 0{,}01 = 0{,}00875$

$P(T_B \cap A) = 0{,}125 \cdot 0{,}67 = 0{,}08375$

$P(T_B \cap B) = 0{,}125 \cdot 0{,}33 = 0{,}04125$

totale W. | bedingte W. | Pfadenwahrscheinlichkeiten

c) $P(E_1) = P(T_A \cap A) = 0{,}86625$

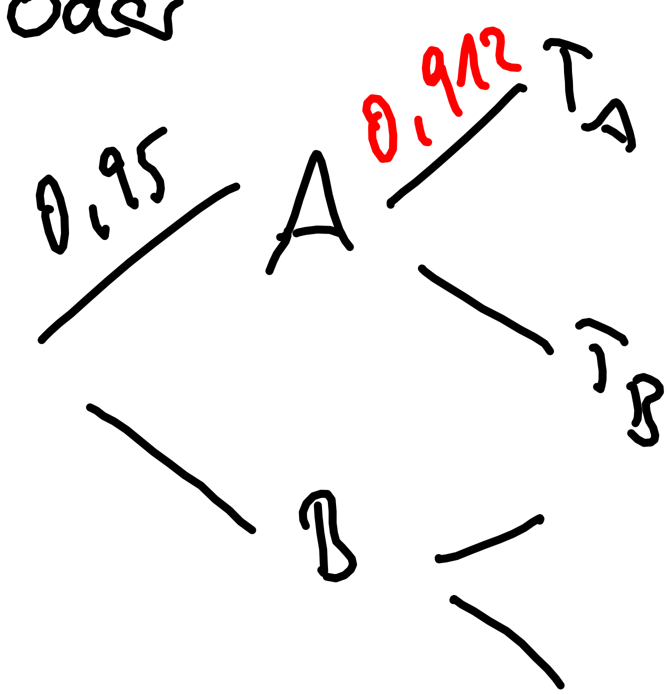
$$P(E_2) = P(A) = P(T_A \cap A) + P(T_B \cap A)$$

$$= 0{,}86625 + 0{,}08375 = 0{,}95$$

$$P(E_3) = P(T_A \mid A) = \frac{P(A \cap T_A)}{P(A)} = \frac{0{,}86625}{0{,}95} = 0{,}912$$

Bayes

oder



$P(A \cap T_A) = 0{,}86625$

inverses Baumdiagramm

Teil A (ohne Hilfsmittel):

- Integralrechnung
  - Partielle Integration

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$$

Aufgabe 1: Bestimmen Sie Stammfunktionen von

a) $f(x) = 2x\cdot e^{x}$ b) $f(x) = 2x\cdot e^{2x}$ c) $f(x) = 4e^{0,5x}\cdot(5x-2)$

a) $f(x) = 2x\cdot e^{x}$

$$\int \underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v'}\,dx = \underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v} - \int \underbrace{2}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x}}_{v}\,dx$$

$$= 2x\cdot e^{x} - 2e^{x} = (2x-2)\,e^{x}$$

c) $$\int \underbrace{4e^{0,5x}}_{v'}\cdot\underbrace{(5x-2)}_{u}\,dx = \underbrace{(5x-2)}_{u}\cdot\underbrace{8e^{0,5x}}_{v} - \int \underbrace{\underbrace{5}_{u'}\cdot\underbrace{8e^{0,5x}}_{v}}_{40e^{0,5x}}$$

$$8 = \frac{4}{0,5}$$

$$= (5x-2)\cdot 8e^{0,5x} - 80e^{0,5x} = \big((5x-2)\cdot 8 - 80\big)\cdot e^{0,5x}$$

$$80 = \frac{40}{0,5}$$

Geben Sie die Ergebnismenge Ω an.

b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Menge dar:

E_L: Die Kugel fällt auf ein Feld mit einer Primzahl

E_P: Die Kugel fällt auf ein Feld mit einer Zahl, die durch vier teilbar ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse E_L und E_P.

Teil B:

- Integralrechnung
  - Partielle Integration

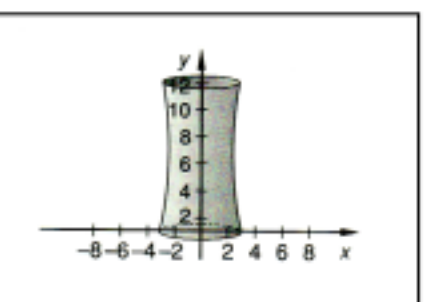
Aufgabe 1:
Bestimmen Sie Stammfunktionen von

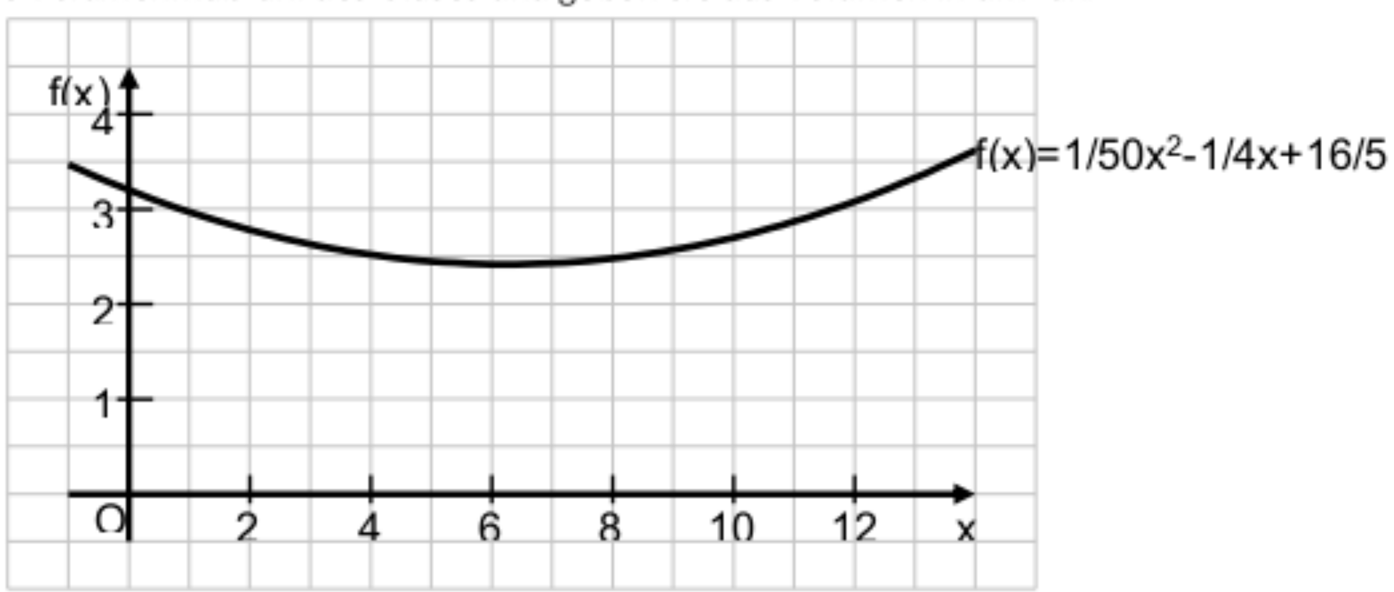
a) $f(x) = 6x^2 \cdot e^{2x-4}$ b) $f(x) = (2x+1) \cdot e^{2x+3}$

  - Rotationskörper

Aufgabe 1:
Eine Brauerei hat von einem Designer ein Bierglas in der unten abgebildeten Form mit einer inneren Höhe von 12 cm entwerfen lassen (Abbildung 1).
Der Verlauf der Innenwand lässt sich bei geeigneter Darstellung im Koordinatensystem durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{16}{5}$ beschreiben (Hinweis: Der Ordinatenabschnitt von f entspricht dem Bodenradius des Bierglases bezogen auf cm.

a) Bestimmen Sie die Volumenmaßzahl des Glases und geben Sie das Volumen in dm^3 an.





Aufgabe 3:
Die Parabel $f(x) = -0.25x^2 + 4$ und die x-Achse schließen eine Fläche ein, die um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Aufgabe 4:
Die Funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 6$ und $g(x) = -x^2 + 10$ schließen eine Fläche ein, die um die x-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Aufgabe 5:
Die Fläche zwischen den Kurven $f(x) = x$ und $g(x) = x^3$ rotiert um die x-Achse. Das Volumen des Rotationskörpers ist gesucht.

Formel Rotationskörper

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$V = \pi \cdot \int_0^{12} (f(x))^2 \, dx$$

dm^3