Interpretation von Flächeninhalten

Je nachdem, was für einen funktionalen Zusammenhang eine Funktion f beschreibt, kann die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse innerhalb bestimmter Grenzen a und b unterschiedlich interpretiert werden. Hier einige Beispiele.

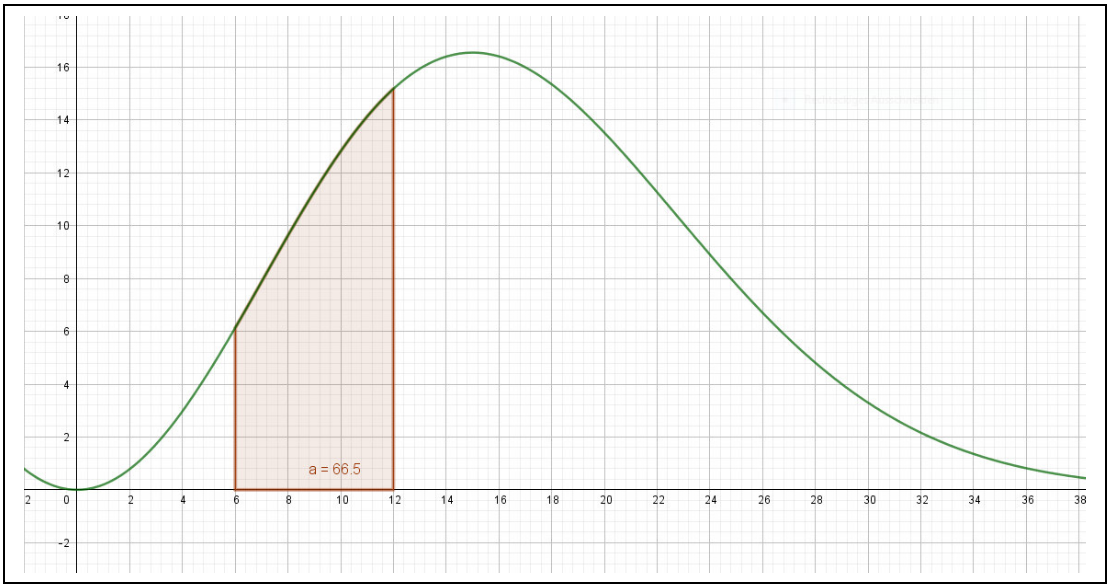
Beispiel 1: Absatzzahlen in Abhängigkeit von der Zeit

Wenn eine Funktion den Absatz zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt, so kann mit Hilfe eines Integrals (also eines Flächeninhalts) der Gesamtabsatz innerhalb eines bestimmten Zeitraums ermittelt werden.

Die Funktion f(t) beschreibt die prognostizierten monatlichen Absatzraten eines Produktes in den kommenden vier Jahren.

$$f_1(t) = 0{,}2 \cdot t^2 \cdot e^{-\left(\frac{t}{15}\right)^2}$$

Dabei steht t für die seit Markteinführung des Produktes vergangene Zeit in Monaten.
$f_1(t)$ gibt die zugehörigen Absatzraten des Produktes zum Zeitpunkt t in Mengeneinheiten (ME) pro Monat an.
Die folgende Abbildung zeigt die Graphen von f_1 im Prognosezeitraum von 4 Jahren.



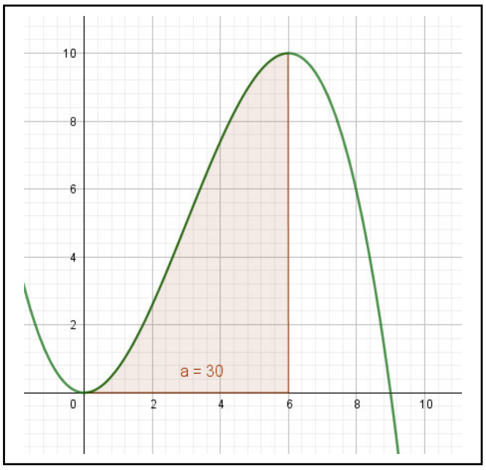
Das Integral $\int_6^{12} f(t)\,dt = 66{,}5$ ergibt den gesamten prognostizierten Absatz im zweiten Halbjahr nach Produkteinführung in Mengeneinheiten. Falls 1 ME = 100 Stück gilt, beträgt der Gesamtabsatz 66.500 Stück. Für den prognostizierten Gesamtabsatz anderer Zeiträume können einfach die Grenzen des Integrals angepasst werden.

<u>Beispiel 2: Produktionsraten in Abhängigkeit von der Zeit</u>

Ein Unternehmen muss in einem Zeitraum die Produktion aufgrund von Wartungs- und Reparaturarbeiten komplett herunterfahren. Anschließend wird die Produktion von 0 langsam auf die maximale Produktion von 10 ME pro Stunde hochgefahren. Der Vorgang des Hochfahrens wird durch folgende Funktion beschrieben:

$v(t) = -\frac{5}{54}t^3 + \frac{5}{6}t^2$ Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden und v(t) die momentane Produktionsgeschwindigkeit in ME je Stunde.

Das Integral $\int_0^6 v(t)\,dt = 30$ ergibt die gesamte Produktionsmenge in den ersten 6 Stunden nach Beginn des Hochfahrens der Produktion.



<u>Beispiel 3: Erlösfunktionen in Abhängigkeit von der Zeit</u>

Für Erlösfunktionen in Abhängigkeit von der Zeit t entsprechen die Gesamterlöse der Fläche zwischen der x-Achse, dem Graphen von E(t) und den senkrechten Geraden durch t_1 und t_2: $\int_{t_1}^{t_2} E(t)\,dt$. Für ausführlichere Informationen lesen Sie bitte die Beispiele 5.1 und 5.2 im Buch ab Seite 350.

<u>Beispiel 4: Kostenfunktionen</u>

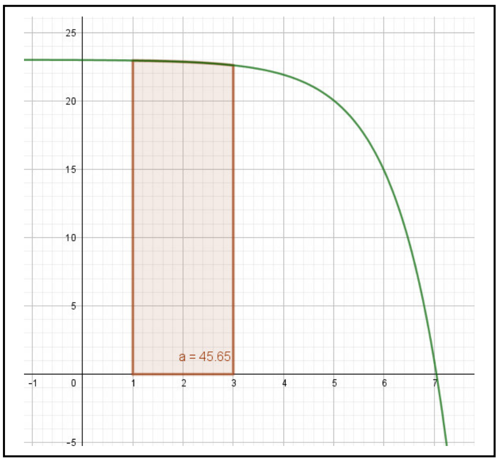
Die Sielhorst GmbH ist ein mittelständisches Unternehmen, das hochwertige Edelstahlgefäße anfertigt. Der ertragsgesetzliche Kostenverlauf wird durch $K(x) = 0{,}1x^3 - 3x^2 + 30x + 500$ beschrieben. Berechnen Sie das Integral der Grenzkostenfunktion von 0 bis 20 und interpretieren Sie das Ergebnis.

In diesem Beispiel entspricht der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Grenzkostenfunktion K'(x), der x-Achse und den senkrechten Geraden durch 0 und 20 demWert der variablen Kosten für die Produktionsmenge x = 20.

$$\int_0^{20} K'(x)\,dx = [K_V(x) + K_{fix}]_0^{20} = K_V(20) + K_{fix} - (K_V(0) + K_{fix}) = K_v(20) + K_{fix} - 0 - K_{fix} = K_V(20)$$

Beispiel 5: Niederschlagsraten in Abhängigkeit von der Zeit

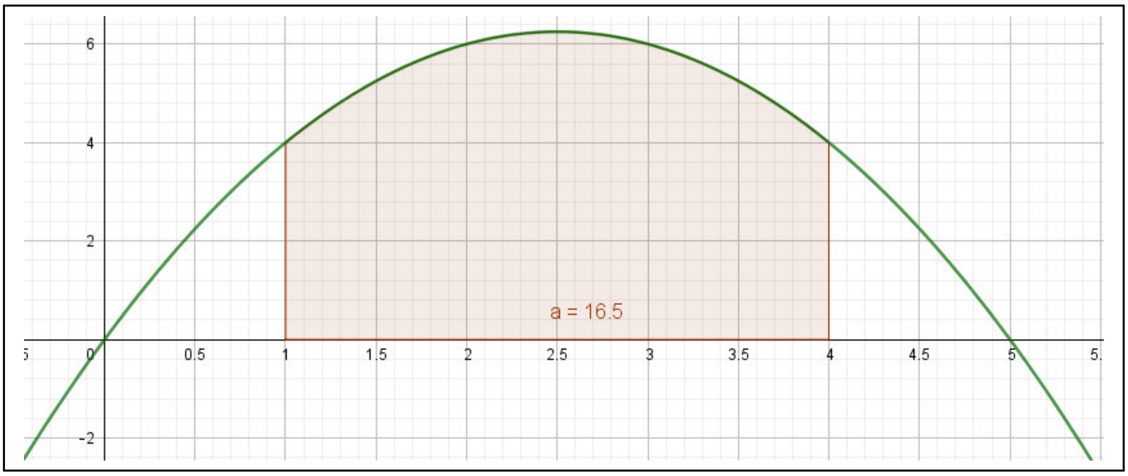
Die Niederschlagsrate während eines Monsumregens kann modellhaft beschrieben werden durch die Funktion r mit r(t) = 23 – 0,02e^{t} (t in Tagen seit dem Einsetzen des Regens und r(t) in Liter pro Quadratmeter und Tag gemessen).



$\int_1^3 r(t)\,dt = 45{,}65$ liefert die Gesamtmenge an Niederschlag zwischen dem 1. Tag und 3. Tag, also 45,65 l/m². Für den gesamten Niederschlag während des Monsunregens ist das Integral von t=0 bis zur Nullstelle von r(t) zu ermitteln.

Beispiel 6: Zuflussraten in Abhängigkeit von der Zeit

In ein Becken fließt Wasser gemäß der Funktion v(t)=5t – t². Dabei gibt t die Zeit in Stunden und v(t) den Zufluss in m³ pro Stunde an. Nun kann man aus v(t) mit Hilfe der Integralrechnung die Wassermenge im Becken zu einem bestimmten Zeitpunkt t ermitteln (wenn man die Wassermenge zu Beginn des Zuflusses kennt) oder die Menge Wasser, die in einem bestimmten Zeitraum ins Becken geflossen ist.



Das Integral $\int_1^4 v(t)\,dt = 16{,}5$ liefert die Menge Wasser, die zwischen der ersten und vierten Stunde ins Becken geflossen ist, also 16,5 m³, das entspricht 16.500 Litern.

Link zum Video: https://www.youtube.com/watch?v=kStA6aFfkeo

Übung: Welche Funktion gibt die Menge Wasser im Becken zum Zeitpunkt t an, wenn man davon ausgeht, dass zu Beginn des Wasserzulaufs bereits 150 Liter im Becken waren?