



WGY12 - Mathematik

Datum:

Inhalte und Übungen für die Klausur am 15.12.2021

Inhalte:

- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen und von Exponentialfunktionen, auch mit Parameter (OHIMI und CAS)
 - Achsenschnittpunkte, Extrem- und Wendepunkte, Grenzwertverhalten, Zeichnungen der Graphen
- Ökonomische Anwendungen der Exponentialfunktion (z.B. Analyse von Absatzzahlen) (OHIMI und CAS)
- Produktlebenszyklus
- Ableitungen mit Produkt- und Kettenregel (OHIMI und CAS)
- Angebots- und Nachfragefunktionen, Marktgleichgewicht (nur CAS)
- Aufstellen von Funktionen mit Hilfe eines Gleichungssystems (Exponentialfunktionen und ganzrationale Funktionen) (nur CAS)
- Eigenschaften der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (OHIMI und CAS)
 - $e^x > 0$,
 - e^x wächst schneller als jede ganzrationale Funktion
 - $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Davon noch nicht behandelt:

- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen mit Parameter → Montag 29.11
- Produktlebenszyklus → Mittwoch 1.12
- Eigenschaften der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (OHIMI und CAS)
 - $e^x > 0$,
 - e^x wächst schneller als jede ganzrationale Funktion
 - $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Übersetzungshilfen:

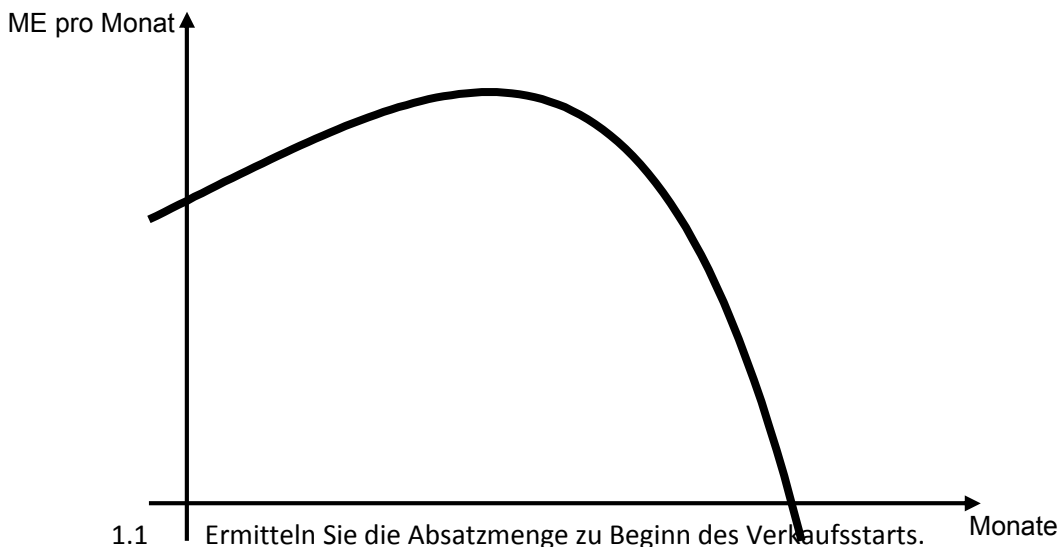
- maximaler Absatz -> Hochpunkt
- langfristiger Absatz -> Grenzwertverhalten (mit lim-Befehl)
- stärkster Rückgang -> Wendepunkt
- stärkster Anstieg -> Wendepunkt
- Übergang progressiv zu degressiv oder umgekehrt -> Wendepunkt
- Absatz zum Verkaufsstart: $t=0$ in Funktion einsetzen (y-Abschnitt)
- Produkt verschwindet vom Markt: Nullstelle berechnen

**Inhalte und Übungen für die Klausur am 15.12.2021****Weitere Hinweise zur Klausur:**

- Achten Sie auf entsprechende Signalbegriffe, die bei den Aufgaben anzeigen, was mathematisch gesucht ist (siehe Übersetzungshilfen)
- Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht genau wissen, was zu tun, schreiben Sie zumindest Ideen auf, die für Teilpunkte sorgen können. Bsp.: gesucht ist der Zeitpunkt des stärksten Absatzrückgangs. Wenn Sie schreiben, dass es um den x-Wert des WP geht, bekommen Sie Punkte für den richtigen Ansatz.
- Denken Sie bei der Dokumentation Ihrer Aufgaben an formale Regelungen, wie z.B. Ableitungen, notw. Bed., hinr. Bed., y-Wert, ggf. Antwortsatz bei der Frage nach Extrem- oder Wendepunkten. Schreiben Sie die entsprechenden Bedingungen auch auf.
- Schreiben Sie die Ableitungen auf. Anzeigen mit d/dx funktioniert auch mit e-Funktionen.
- Arbeiten Sie die Klausurübungen sorgfältig durch. Wenn Sie diese hinreichend sicher beherrschen, dann sollten Sie in der Klausur eine gewisse Sicherheit haben.
- **Mailen Sie, wenn bei den Vorbereitungen oder beim Lernen etwas nicht klar ist.**

(Übungen ohne Hilfsmittel)**Aufgabe 1**

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (50 - t) \cdot e^{0,05t}$ (t in Monaten und f(t) in ME) modelliert. Der folgende Graph verdeutlicht die Situation.



- 1.1 Ermitteln Sie die Absatzmenge zu Beginn des Verkaufsstarts.
- 1.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann.
- 1.3 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 30$ liegt.

$$(f''(t) = \left(\frac{1}{40} - \frac{t}{400} \right) \cdot e^{0,05t} \text{ kann verwendet werden})$$



WGY12 - Mathematik

Inhalte und Übungen für die Klausur am 15.12.2021

Datum:

Aufgabe 2 Ermitteln Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.

a) $f(x) = 4x \cdot e^{3x}$ b) $g(x) = (x^2 + 5) \cdot e^{0,2x+2}$

Aufgabe 3 Die Unternehmensleitung der Cylenda GmbH entscheidet sich statt der bisher geplanten innovativen Werbung für ein klassisches Werbekonzept. Sie geht bei der Entwicklung der wöchentlichen Absatzzahlen deshalb von folgender Funktion g aus: $g(x) = 2,1x^2 \cdot e^{-0,12 \cdot x}$ Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung nach diesem Modell. (3P.)

Aufgabe 4 Gegeben seien die reellen Scharfunktionen $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 + 34$ mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Zahl für a so, dass f_a an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ jeweils eine Wendestelle besitzt.

Lösungen (in Kurzform)

Aufgabe 1: 1.1: $f(0) = 50$; 1.2: $f(t)=0 \Leftrightarrow t=50$; 1.3. N.B. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (1,5-0,05t)e^{0,05t} = 0 \Leftrightarrow t=30$ H.B. $f''(30)<0$ warum?

Aufgabe 2: a) $f'(x) = e^{3x} (4+12x)$ und $f''(x) = e^{3x} (36x+24)$
b) $g'(x) = e^{0,2x+2} (0,2x^2+2x+1)$ und $f''(x) = e^{0,2x+2} (0,04x^2+0,8x+2,2)$

Aufgabe 3: Grenzwert ermitteln, $e^{-0,12x}$ in Nenner verschieben durch Ändern des Vorzeichens im Exponenten und dann argumentieren mit der Eigenschaft, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede ganzrationale Funktion und somit der Grenzwert gleich 0 ist.

Aufgabe 4: N.B. $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2a/6 = 0$ und wenn $x = \pm 2$ gelten soll, muss $a = -12$ sein. H.B. noch überprüfen.



WGY12 - Mathematik

Inhalte und Übungen für die Klausur am 15.12.2021

Datum:

(Übungen mit CAS)

Aufgabe 1

Die Jarvis GmbH stellt Projektoren her und neuerdings auch Brillen, in die sich Informationen wie z. B. Navigationshinweise einblenden lassen. Für das Brillen-Modell Overview geht die Jarvis GmbH von folgender Absatzfunktion aus:

$$f_a(t) = 8 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{t}{a}}$$

Dabei gibt t die Zeit in Monaten an, $f_a(t)$ entspricht dem Absatz Mengeneinheiten pro Monat und a stellt einen Qualitätsparameter dar. Dabei sei t eine positive reelle Zahl und a eine reelle Zahl aus dem Intervall [1; 8].

- Skizzieren Sie den Kurvenverlauf von f_a für $a = 1$, $a = 2$ und $a=3$.
- Untersuchen Sie anhand der Graphen den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf der Funktion f_a und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Entwicklung des Absatzes
- Der Vertrieb der Jarvis GmbH ist an einer näheren Untersuchung des Absatzes interessiert. Zeigen Sie, dass die Höhe des maximalen Absatzes unabhängig vom Qualitätsparameter a ist.
- Berechnen Sie für $a = 2$ den Zeitpunkt des maximalen Absatzes und den des größten Absatzrückgangs.

**Aufgabe 2**

Am Markt für Autolacke gilt folgende Angebotsfunktion $p_A(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 5x$ mit $x \in [0; 5]$,

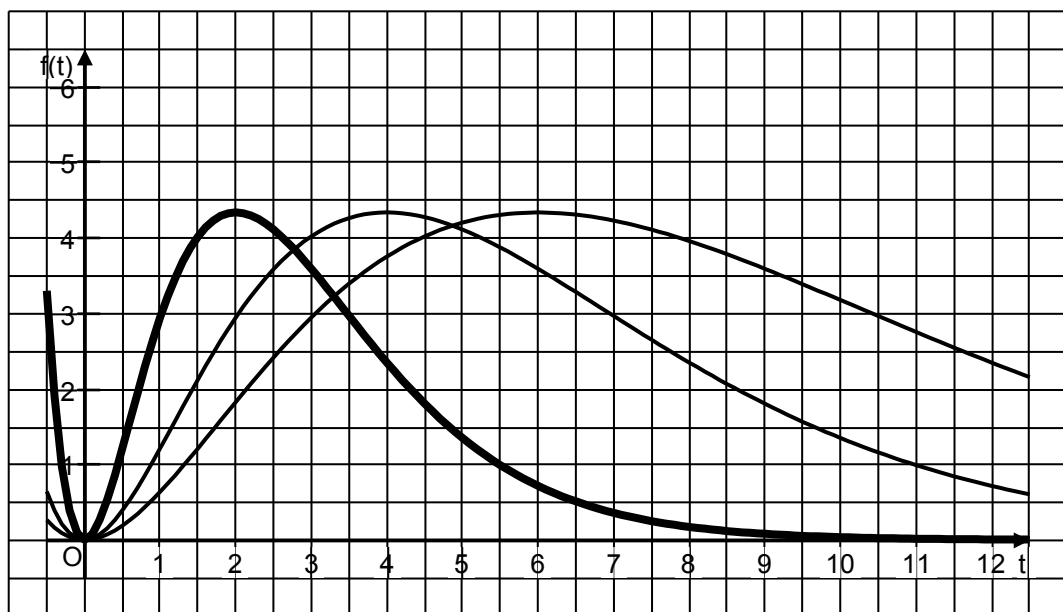
x gibt die Stückzahl in Mengeneinheiten (ME) an, $p_A(x)$ den Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE / ME). Bei der Nachfragefunktion wird von einer Funktionsgleichung der Form

$$p_N(x) = -0,1 \cdot x^3 + x^2 - 10,7x + 29 \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ausgegangen.}$$

- Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich von $p_N(x)$
- Skizzieren Sie die Funktionsgraphen der Nachfragefunktion p_N und der Angebotsfunktion p_A in ihrem ökonomisch relevanten Bereich.
- Prüfen Sie, ob die Nachfragefunktion p_N in ihrem Definitionsbereich streng monoton fallend ist.
- Erläutern Sie im ökonomischen Zusammenhang, warum Nachfragefunktionen in der Regel streng monoton fallend sind.
- Zeigen Sie, dass der Gleichgewichtspreis bei ca. 9,76 GE / ME liegt.
- Berechnen Sie Angebotsüberhang bei einem Preis von 10 GE/ME.
- Bestimmen Sie den Preisbereich, bei dem es einen Nachfrageüberhang gibt.

Lösungen (Kurzform)

1a)





- 1b) Je größer der Qualitätsparameter a ist, desto schwächer steigen die Graphen zunächst an und desto weiter verschieben sich die jeweiligen Hoch- und Wendepunkte nach rechts. Auf das Grenzwertverhalten für große t hat der Parameter keinen Einfluss, die waagerechte Achse ist jeweils eine Asymptote. Die maximale Absatzmenge bleibt ebenfalls für alle Parameter a unverändert, da sich alle Hochpunkte auf einer Parallelen zur waagerechten Achse befinden.

Je größer der Qualitätsparameter a ist, umso langsamer steigen die Absatzzahlen und umso später werden das Absatzmaximum sowie der Zeitpunkt des stärksten Absatzrückgangs erreicht. Unabhängig von a sinken die Absatzzahlen langfristig annähernd auf null ab. Die maximalen monatlichen Absatzmengen sind ebenfalls unabhängig vom Qualitätsparameter a .

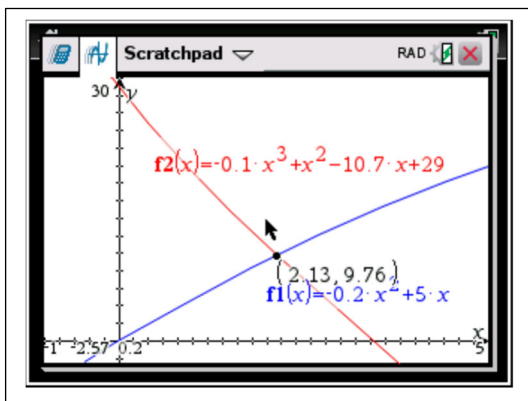
- 1c) **Signalbegriff: maximaler Absatz** => gesucht ist der Hochpunkt und da es um die Höhe und nicht den Zeitpunkt geht, ist der y -Wert von Interesse.

y -Wert des HP von $f_a(t)$ ist unabhängig von a . Der HP liegt bei $t = 2a$ und es gilt $f_a(2a) = 32e^{-2} = 4,33$ (auch in Skizze ablesbar)

- 1d) gesucht ist der WP für $a=2$ (**Signalbegriff: stärkster Absatzrückgang**). Überprüfen der notw. Bedingung ergibt $t=1,17$ und $t=6,83$. Da der gesuchte WP rechts vom HP liegen muss, gilt $t=6,83$. Der Zeitpunkt des Maximums liegt für $a=2$ bei $t = 2 \cdot 2 = 4$.

- 2a) Ökonomisch sinnvoll sind positive Absatzmengen, d.h. gesucht ist hier die Nullstelle von $P_N(x)$ (Sättigungsmenge). Diese liegt bei $x = 3,43$ => $D_{ök} = [0 ; 3,43]$

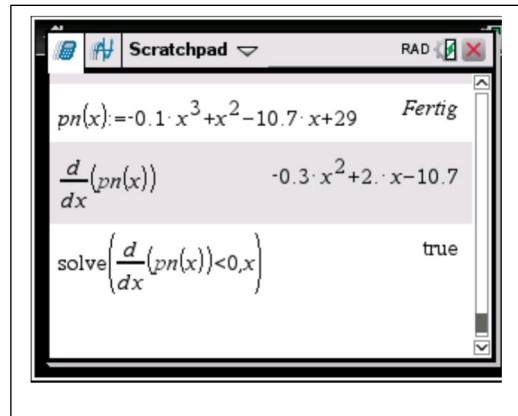
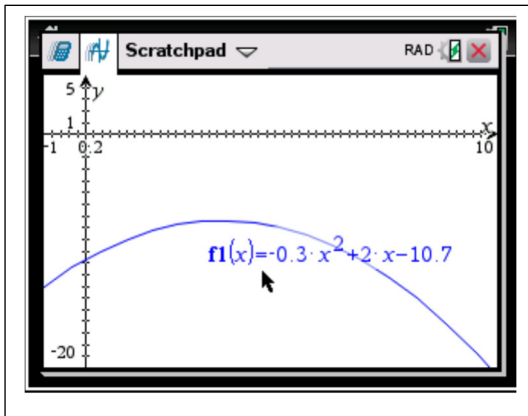
- 2b)



- 2c) Eine Funktion fällt monoton, wenn die 1. Ableitung der Funktion nur negative Funktionswerte hat, also $f'(x) < 0$ für alle x gilt: In diesem Fall:

Rechnerische Lösung: Die Ableitung von $p_N(x)$ definieren und mit solve Befehl o.g. Eigenschaft überprüfen: $\text{solve}(p_N'(x) < 0, x)$ ergibt „true“.

Graphische Lösung: Graph der 1. Ableitung anzeigen lassen. Dieser ist stets unterhalb der x-Achse und damit ist die 1. Ableitung von $p_N(x) < 0$ für alle x und damit fällt $p_N(x)$ monoton.



- 2d) Wenn der Preis steigt, sinkt im Allgemeinen die Nachfrage. Umgekehrt steigt die Nachfrage, wenn der Preis sinkt. Daher muss der Graph fallen, wenn die Nachfrage zunimmt.
- 2e) Schnittpunkt von $p_A(x)$ und $p_N(x)$ berechnen. y -Wert ist der Gleichgewichtspreis.
- 2f) $p_A(x) = 10 \Leftrightarrow x = 2,192$ und $p_N(x) = 10 \Leftrightarrow x = 2,101 \Rightarrow$ Angebotsüberhang $x = 0,091$ ME
- 2g) $p_N(x) > p_A(x) \Leftrightarrow x < 2,13$ (auch aus 2e) ablesbar \Rightarrow Preisbereich mit Nachfrageüberhang 0 GE/ME – 9,76 GE/ME

Aufgabe 3

Die Tabelle beschreibt die Absatzzahlen der jeweils angegebenen Monate.

Monat seit Januar 2015	0	6	9	10	16
Absatzzahlen in Stück pro Monat	0	22 458	38 439	45 470	42 128

- a) Stellen Sie eine ganzrationale Funktion f **vierten Grades** auf, die die Absatzentwicklung beschreibt. Dabei gibt x die Zeit in Monaten nach der Markteinführung im Januar 2015 und $f(x)$ die monatlichen Absatzzahlen in Stück zum Zeitpunkt x an.



WGY12 - Mathematik

Datum:

Inhalte und Übungen für die Klausur am 15.12.2021

- b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und markieren Sie im Diagramm die Wendepunkte und den Hochpunkt.

Der Vertriebsleiter geht davon aus, dass sich die Entwicklung der Absatzzahlen des Modells „Caps“ durch die Funktion f mit $f(x) = -11x^4 + 300x^3 - 2.443x^2 + 9.977x$ (x Zeit in Monaten, $f(x)$ zugehörige monatliche Absatzzahlen in Stück) beschreiben lässt. Er vertritt die Auffassung, dass der Verlauf der Absatzzahlen des Modells „Caps“ einem Produktlebenszyklus mit den folgenden Phasen entspricht:

Phase	Einführung	Wachstum	Reife	Sättigung	Degeneration
Absatz	degressiv	progressiv	degressiv	langsam	stark
	steigend	steigend	steigend	fallend	fallend

- c) Untersuchen Sie die Länge des Produktlebenszyklus, d. h., wie lange mit positiven Absatzzahlen pro Monat für das Modell „Caps“ zu rechnen ist.
- d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beginns der Wachstumsphase.
- e) Der Vertriebsleiter behauptet, dass sich das Produkt 15 Monate nach Markteinführung ($x = 15$) noch vor der Sättigungsphase befindet. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage des Vertriebsleiters.
- f) Die Betriebsleitung plant das Produkt vom Markt zu nehmen, wenn die Absatzmenge auf 20 % der maximalen Absatzmenge gesunken ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

Lösungen (in Kurzform)

- a) LGS mit 5 Variablen lösen
- b) Graph zeichnen lassen und Fenstergröße entsprechend anpassen (an Wertetabelle orientieren)
- c) Nullstelle berechnen -> Produkt wird nach 18 Monaten nicht mehr verkauft.
- d) gesucht ist die erste Wendestelle -> Wachstumsphase beginnt nach etwas weniger als 4 Monaten
- e) Steigung für $x=15$ überprüfen: positiv => Aussage ist beweisen; negativ => Aussage widerlegt.
- f) y -Wert des Hochpunkts ermitteln, dann 20% und Gleichung nach x auflösen -> Produkt wird nach 17,21 Monaten vom Markt genommen.



WGY12 - Mathematik

Inhalte und Übungen für die Klausur am 15.12.2021

Datum:

Aufgabe 4

Führen Sie für $f_a(x) = 0,2 \cdot a \cdot x^5 - 2x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ eine Kurvendiskussion durch. Untersuchen Sie

- y-Abschnitt und Nullstellen
- Extrem- und Wendepunkte
- Verhalten im Unendlichen
- Symmetrie

Aufgaben aus dem Buch

Aufgabe 5

Buch Seite 312, Beispiel 4.44

Aufgabe 6

Buch Seite 318, Nr. 20

Aufgabe 7

Buch Seite 318, Nr. 16

Aufgabe 8

Buch Seite 321, Nr. 31

Aufgabe 9

Buch Seite 322, Nr. 39a und 39c

Aufgabe 10

Buch Seite 328, Nr. 73 bis e4) (ohne c2 und ohne d2))

Aufgabe 11

Buch Seite 331, Nr. 86